

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Курс лекций по теме:

«ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА»

Книга I

Автор: К.Д.М.

$A \cdot B$	$\det(A)$	A^T
λA	$\vec{u} \cdot \vec{v}$	$\ \vec{w}\ $
A^{-1}	$\vec{u} \times \vec{v}$	i, j, k

ЧЕРНОВОЙ ВАРИАНТ

Иваново, 2026

Оглавление

1	Линейная и векторная алгебра	1
1.1	Матрица	1
1.1.1	Виды квадратных матриц	5
1.1.2	Элементарные преобразования матриц. Ступенчатый вид	8
1.1.3	Действия над матрицами	20
1.2	Определители матриц	44
1.2.1	Вычисление определителей квадратных матриц второго и третьего порядков	45
1.2.2	Свойства определителей	49
1.2.3	Разложение определителя по строке или столбцу	52
1.2.4	Теорема Лапласа	56
1.2.5	Приведение определителя к треугольному виду	56
1.3	Обратная матрица	62
1.3.1	Определение обратной матрицы	63
1.3.2	Лемма о порядке обратной матрицы	63
1.3.3	Лемма о единственности обратной матрицы	64
1.3.4	Лемма об определителе обратной матрицы	64
1.3.5	Вырожденные (особенные) матрицы	65
1.3.6	Нахождение обратной матрицы	65
1.4	Системы линейных уравнений	76
1.4.1	Основные понятия	76
1.4.2	Методы решения систем линейных уравнений	79
1.5	Векторная алгебра	89
1.5.1	Основные понятия	89
1.5.2	Действия с векторами	90
1.5.3	Координаты вектора. Базис	93
1.5.4	Ортогональные базисы. Направляющие косинусы	94
1.5.5	Линейные операции в координатах	95
1.5.6	Коллинеарные и компланарные векторы	95
1.5.7	Скалярное произведение векторов	96
1.5.8	Угол между векторами. Ортогональность	97
1.5.9	Проекция вектора на направление	97

1.5.10 Векторное произведение	97
1.5.11 Геометрический смысл векторного произведения	98
1.5.12 Свойства векторного произведения	98
1.5.13 Смешанное произведение	99
1.5.14 Линейная комбинация и линейная зависимость	100
1.5.15 Разложение вектора по базису	101

Глава 1

ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

В данной главе мы рассмотрим основы линейной и векторной алгебры — фундаментального математического аппарата, широко применяемого в науке и технике. Векторы позволяют описывать величины, обладающие не только числовым значением, но и направлением, что делает их незаменимыми для моделирования физических процессов, графических преобразований и анализа данных.

Естественным развитием векторного подхода стала концепция матриц — прямоугольные таблицы чисел. Они помогают преобразовывать векторы и эффективно решать системы линейных уравнений. Матрицы также описывают операции поворота, масштабирования и перемещения в пространстве. Так то с них и начнём.

1.1 Матрица

Для начала нам нужно понять, что же такое *матрица*. Чуть выше было сказано, что это некая прямоугольная таблица чисел. Давайте разберёмся подробнее — и начнём с наглядного образа.

Представьте таблицу, похожую на расписание уроков или таблицу умножения: у неё есть строки и столбцы, а на пересечении стоят числа. Точно так же устроена и матрица — это прямоугольная таблица, заполненная числами (или другими математическими объектами), где у каждого элемента есть строгое место: номер строки и номер столбца.

Хотя внешне матрица похожа на обычную таблицу, её сила — в **операциях**, которые над ней можно производить. Эти операции превращают матрицу из про-

стого хранилища чисел в мощный инструмент линейной алгебры. Уже скоро мы научимся складывать, умножать и преобразовывать матрицы — а пока закрепим базовое понятие на примере.

Обычно матрицы обозначают **заглавными латинскими буквами**: A , B , C и т. д. Например, вот простая матрица A с двумя строками и тремя столбцами:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 10 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Здесь A — обозначение самой матрицы, а числа a_{ij} (читается «а-и-жэ») — её элементы. Индекс i указывает номер строки, j — номер столбца. Например:

- элемент $a_{12} = 5$ (первая строка, второй столбец);
- элемент $a_{23} = 3$ (вторая строка, третий столбец).

Обратите внимание: если поменять местами хотя бы два числа, получится уже другая матрица. Порядок здесь критически важен — в отличие, скажем, от простого списка чисел, где перестановка элементов ничего не меняет.

Но зачем вообще нужны такие упорядоченные таблицы? Дело в том, что матрицы позволяют компактно записывать и обрабатывать большие объёмы данных, а также моделировать сложные взаимосвязи между объектами. С их помощью удобно:

- записывать системы линейных уравнений (вместо того чтобы писать каждое уравнение отдельно, можно записать всю систему одной матрицей);
- описывать преобразования в пространстве (повороты, растяжения и другие геометрические операции);
- хранить и обрабатывать информацию в компьютерных программах (например, изображения часто представляются как матрицы пикселей, а базы данных — как матрицы значений).

Как видите, практическая польза от матриц очень большая. Чтобы перейти к более глубокому изучению их свойств, дадим строгое математическое определение.

Определение 1.1. Матрица размера $m \times n$ (обозначается также как $A_{m \times n}$) — это прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов, где каждый элемент a_{ij} находится на пересечении i -й строки и j -го столбца. Формально матрица имеет следующий вид:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где:

- i — номер строки ($1 \leq i \leq m$);
- j — номер столбца ($1 \leq j \leq n$);
- a_{ij} — число или другой математический объект на пересечении i -й строки и j -го столбца.

Важно подчеркнуть, что «прямоугольная» означает строгую упорядоченность структуры: все строки содержат ровно n элементов, а все столбцы — ровно m элементов. Это гарантирует однозначную индексацию a_{ij} .

Квадратная матрица порядка n — частный случай матрицы, когда число строк m совпадает с числом столбцов n . Термин «порядок n » показывает, сколько строк (и столбцов) содержит матрица: так, матрица 4×4 имеет порядок 4, а матрица 2×2 — порядок 2. Формально её можно записать как:

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Равенство матриц. Две матрицы A и B называются **равными** (обозначается $A = B$), если:

1. они имеют одинаковый размер ($m \times n$);
2. все их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j .

Проиллюстрируем это на примере. Рассмотрим две матрицы одинакового размера 2×2 (иными словами, матрицы 2-го порядка):

Пример 1.1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверим условия равенства:

- **Размер:** обе матрицы имеют размер 2×2 (2 строки, 2 столбца) — условие выполнено.
- **Элементы:** сравним соответствующие элементы:
 - $a_{11} = 3$ и $b_{11} = 3 \rightarrow$ равны;
 - $a_{12} = 7$ и $b_{12} = 7 \rightarrow$ равны;
 - $a_{21} = 1$ и $b_{21} = 1 \rightarrow$ равны;
 - $a_{22} = 4$ и $b_{22} = 4 \rightarrow$ равны.

Поскольку оба условия выполнены, мы можем записать: $A = B$.

А теперь посмотрим на другой пример:

Пример 1.2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и C имеют одинаковый размер, но $a_{22} = 4 \neq 5 = c_{22}$. Значит, $A \neq C$ — несмотря на то, что три элемента совпадают, различие хотя бы в одном элементе делает матрицы неравными.

Такое строгое определение равенства важно для дальнейших операций с матрицами: сложение, умножение и другие действия требуют точного соответствия размеров и элементов.

В дальнейшем мы рассмотрим различные виды матриц. Особое внимание уделим **квадратным матрицам**, среди которых выделяются:

- | | |
|-----------------------------------|----------------------|
| • диагональные, | • единичная матрица, |
| • треугольные (верхние и нижние), | • нулевая матрица |
| • симметричные, | • и другие. |

Эти типы матриц играют ключевую роль в линейной алгебре и её приложениях — от решения систем уравнений до компьютерной графики и машинного обучения.

1.1.1 Виды квадратных матриц

Теперь, когда мы разобрались с базовыми понятиями матриц и их равенства, перейдём к изучению различных видов квадратных матриц. Начнём с одного из самых важных типов — *диагональной матрицы*.

Определение 1.2. Квадратную матрицу $A_{n \times n}$ называют **диагональной**, если все её элементы a_{ij} , кроме элементов *главной диагонали*, равны нулю.

В этом определении ключевое понятие — *главная диагональ*. Возможно, слово «диагональ» вам знакомо, но почему она называется «главной»? Разберёмся в этом подробнее.

Определение 1.3. Главной диагональю квадратной матрицы называют совокупность элементов a_{ij} , расположенных на линии, идущей из *левого верхнего угла* матрицы (a_{11}) в *правый нижний угол* (a_{nn}).

Чтобы наглядно представить, о чём идёт речь, посмотрим на визуальное представление. На рисунке 1.1 показана квадратная матрица 3×3 , где элементы главной диагонали выделены красным цветом.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Рисунок 1.1. Главная диагональ квадратной матрицы 3×3

На рисунке чётко видно, что главная диагональ проходит через элементы:

- a_{11} (первая строка, первый столбец),
- a_{22} (вторая строка, второй столбец),
- a_{33} (третья строка, третий столбец).

Для *диагональной матрицы* все остальные элементы, как мы знаем уже из определения, (не на главной диагонали) должны быть равны нулю. Например, диагональная матрица 3×3 будет выглядеть так:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix},$$

где d_{11} , d_{22} , d_{33} — произвольные числа.

В дальнейшем мы увидим, что диагональные матрицы особенно удобны для вычислений: они упрощают умножение матриц, нахождение обратных матриц и вычисление собственных значений.

Следующий тип рассматриваемой матрицы — **симметричная**.

Определение 1.4. Квадратную матрицу $A_{n \times n}$ называют **симметричной**, если для всех её элементов выполняется условие $a_{ij} = a_{ji}$, то есть элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой.

Иными словами, если «отразить» матрицу относительно главной диагонали, она останется неизменной. Это свойство можно наглядно представить: элементы выше главной диагонали зеркально повторяют элементы ниже неё.

Проиллюстрируем это на примере симметричной матрицы 3×3 :

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверим условие симметрии:

- $a_{12} = -1$ и $a_{21} = -1 \rightarrow$ равны;
- $a_{13} = 4$ и $a_{31} = 4 \rightarrow$ равны;
- $a_{23} = 0$ и $a_{32} = 0 \rightarrow$ равны.

Следующий важный тип — **единичная матрица**.

Определение 1.5. Единичной матрицей порядка n (обозначается I_n или просто I) называют диагональную матрицу, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0.

Пример единичной матрицы 3-го порядка:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичная матрица играет роль «единицы» при умножении матриц: для любой матрицы A подходящего размера выполняется $A \cdot I = I \cdot A = A$. Это аналог числа 1 в обычной арифметике.

Ещё один распространённый тип — **треугольная матрица**.

Определение 1.6. Квадратную матрицу называют:

- **верхней треугольной**, если все элементы ниже главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i > j$);
- **нижней треугольной**, если все элементы выше главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i < j$).

Ниже приведены примеры:

Верхняя треугольная матрица 3×3 :

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}.$$

Нижняя треугольная матрица 3×3 :

$$L = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-3} & 0 \\ 4 & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

Треугольные матрицы удобны для решения систем линейных уравнений методом Гаусса, а также при LU-разложении.

Особо выделим **нулевую матрицу**.

Определение 1.7. Нулевой матрицей размера $m \times n$ (обозначается O или 0) называют матрицу, все элементы которой равны нулю.

Пример нулевой матрицы 2×3 :

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нулевая матрица играет роль «нуля» при сложении матриц: $A + O = O + A = A$ для любой матрицы A того же размера.

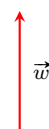
Отдельно рассмотрим матрицы особых размеров.

Определение 1.8. Матрица размера $1 \times n$ называется **вектор-строкой**, а матрица размера $m \times 1$ — **вектор-столбцом**.

Примеры:

- Вектор-строка: $(1 \ 2 \ 3)$ (размер 1×3) $\xrightarrow{\vec{v}}$
Горизонтальное представление: элементы 1, 2, 3 расположены в одну строку; геометрически соответствует вектору $\vec{v}$, направленному вдоль оси абсцисс.

- Вектор-столбец: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ (размер 3×1)



Вертикальное представление: элементы 4, 5, 6 расположены друг под другом; геометрически соответствует вектору $\vec{w}$, направленному вдоль оси ординат.

Векторы в таком представлении широко используются в линейной алгебре и её приложениях.

Наконец, особый случай — **матрица** 1×1 .

Определение 1.9. Матрица размера 1×1 , состоящая из одного элемента $[a]$, по сути эквивалентна самому числу a .

Например, матрица $[7]$ ведёт себя в операциях так же, как число 7:

- $[7] + [3] = [10]$ (аналогично $7 + 3 = 10$);
- $[2] \cdot [4] = [8]$ (аналогично $2 \cdot 4 = 8$).

Теперь, отталкиваясь от этих основ, углубимся в методы работы с матрицами произвольных размеров.

1.1.2 Элементарные преобразования матриц. Ступенчатый вид

Прежде чем переходить к арифметическим действиям над матрицами (сложению, умножению), важно освоить **элементарные преобразования** — набор простых операций, позволяющих упрощать матрицы, не меняя их фундаментальных свойств. Эти преобразования лежат в основе метода Гаусса для решения систем линейных уравнений, вычисления ранга матрицы, нахождения обратной матрицы и многих других задач.

1.1.2.1 Элементарные преобразования строк

Существует четыре типа элементарных преобразований, которые можно выполнять над **строками** матрицы. Разберём каждое подробно, используя наглядные примеры.

Для обозначения строк будем использовать символ R_i , где i — номер строки. Например, R_1 — первая строка, R_2 — вторая и так далее. Для указания другой строки, которая будет отличаться от R_i , будем использовать символ j . В записи преобразований будем применять стандартный математический символ $\leftarrow$, который читается как «заменить на». Например, $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ означает: «заменить

вторую строку на результат вычитания из неё удвоенной первой строки». Такой формат компактен и широко распространён в научной литературе.

Итак, перечислим четыре типа элементарных преобразований строк.

1. Перестановка двух строк ($R_i \leftrightarrow R_j$).

Например, в матрице A меняем местами первую и третью строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Удаление нулевой строки (строки, все элементы которой равны нулю).

Нулевая строка не несёт полезной информации: она соответствует уравнению $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$, которое выполняется всегда и не накладывает никаких ограничений на переменные. Поэтому такие строки можно без проблем отбросить — это упрощает матрицу, не меняя её сути.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{удалить } R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Умножение всех элементов строки на число, отличное от нуля ($R_i \leftarrow c \cdot R_i$, $c \neq 0$).

Это преобразование, называемое **нормировкой**, позволяет сделать первый ненулевой элемент строки равным единице — что существенно упрощает дальнейшие шаги метода Гаусса.

Сам термин «нормировка» отражает суть выполняемой операции: мы приводим элемент к своего рода «норме» — стандартному, удобному для вычислений значению, которым в данном случае выступает единица. Такое приведение к единичному значению не меняет сути системы, а лишь упрощает её вид для последующих преобразований.

При умножении строки на коэффициент c вся строка масштабируется пропорционально, но соотношения между элементами сохраняются — это гарантирует, что решение системы не изменится. Таким образом, нормировка является допустимым элементарным преобразованием, сохраняющим эквивалентность системы линейных уравнений.

Разберём подробно на примере нормировки первой строки матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{4}{2} & \frac{6}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Прибавление ко всем элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число ($R_i \leftarrow R_i + c \cdot R_j, i \neq j$).

Это ключевая операция для зануления элементов под ведущими. Мы берём строку R_j , умножаем её на коэффициент c , а затем поэлементно прибавляем к строке R_i . Цель — получить ноль в нужной позиции, чтобы приблизить матрицу к ступенчатому виду.

Пошагово разбираем пример:

Исходная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Шаг 1: умножение первой строки на -2

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Шаг 2: сложение строк ($R_2 + (-2R_1)$)

$$\begin{pmatrix} 2 + (-2) & 5 + (-4) & 7 + (-6) \end{pmatrix}$$

Финальная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Все эти операции обратимы, что означает: перестановку строк ($R_i \leftrightarrow R_j$) можно отменить путём повторной перестановки тех же строк; умножение строки на коэффициент c ($R_i \leftarrow c \cdot R_i$) компенсируется умножением на обратный коэффициент $1/c$ ($R_i \leftarrow 1/c \cdot R_i$); а прибавление к одной строке другой, умноженной на коэффициент ($R_i \leftarrow R_i + c \cdot R_j$), устраняется вычитанием той же величины ($R_i \leftarrow R_i - c \cdot R_j$). Благодаря этой обратимости операции не меняют «сущности» матрицы — они лишь преобразуют её к более удобному для анализа виду.

Замечание . Те же самые операции можно выполнять и над **столбцами** матрицы (обозначая $C_i \leftrightarrow C_j$, $C_i \leftarrow cC_i$, $C_i \leftarrow C_i + cC_j$; здесь C означает *column* — «столбец»). В этой книге мы будем в основном использовать строчные преобразования, но следует помнить о столбцовой симметрии — она пригодится в других разделах линейной алгебры.

Теперь, когда мы освоили элементарные преобразования строк и столбцов, можем ввести важное понятие эквивалентных матриц. Оно позволяет классифицировать матрицы по их «структурной схожести»: даже если две матрицы выглядят по-разному, они могут быть эквивалентны, если одна получается из другой с помощью изученных операций.

1.1.2.2 Эквивалентные матрицы

Определение 1.10. Матрицы A и B называются **эквивалентными** (обозначается $A \sim B$), если одну из них можно получить из другой конечной последовательностью элементарных преобразований строк и/или столбцов.

Эквивалентные матрицы могут выглядеть по-разному, но они обладают одинаковым *рангом* (понятие, которое мы введём чуть позже) и соответствуют одним и тем же линейным зависимостям между строками или столбцами.

Пример 1.3

Рассмотрим матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Применим к ней следующие элементарные преобразования:

1. Вычтем из второй строки первую, умноженную на 4: $R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1$.
2. Вычтем из третьей строки первую, умноженную на 7: $R_3 \leftarrow R_3 - 7R_1$.

Получим матрицу B :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Далее, вычтем из третьей строки вторую, умноженную на 2: $R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2$.

Получим матрицу C :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $A \sim B \sim C$, поскольку каждая следующая матрица получена из предыдущей элементарными преобразованиями. Все три матрицы эквивалентны, хотя их элементы существенно различаются.

Матрица C имеет **ступенчатый вид** — форму, к которой можно привести любую матрицу с помощью элементарных преобразований. Разберём это подробнее в следующем подразделе.

1.1.2.3 Ступенчатый вид матрицы

Среди множества эквивалентных матриц особенно выделяется **ступенчатый вид** (или *строчная ступенчатая форма*, row echelon form). Это такая форма, в которой:

- все ненулевые строки расположены выше нулевых;
- в каждой ненулевой строке первый ненулевой элемент (называемый **ведущим** или **главным**) находится строго правее ведущего элемента предыдущей строки;
- все элементы под ведущим элементом в том же столбце равны нулю.

Разберём подробно на примере матрицы C из предыдущего раздела:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим, удовлетворяет ли матрица C условиям ступенчатого вида:

1. **Ненулевые строки выше нулевых.** В матрице C две ненулевые строки (1-я и 2-я) расположены над нулевой строкой (3-я). **Условие выполнено.**
2. **Положение ведущих элементов.** Найдём ведущие элементы в каждой ненулевой строке:
 - В 1-й строке первый ненулевой элемент — это 1 (в позиции (1, 1)).
 - В 2-й строке первый ненулевой элемент — это -3 (в позиции (2, 2)).

Проверим их расположение: ведущий элемент 2-й строки (-3) находится в столбце 2, что правее столбца 1, где расположен ведущий элемент 1-й строки. **Условие выполнено.**

3. Нули под ведущими элементами.

- Под ведущим элементом 1 в позиции $(1, 1)$ во 2-й и 3-й строках в столбце 1 стоят нули.
- Под ведущим элементом -3 в позиции $(2, 2)$ в 3-й строке в столбце 2 стоит ноль.

Условие выполнено.

Таким образом, матрица C действительно имеет ступенчатый вид. Визуально выделим ведущие элементы:

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\boxed{1}$ и $\boxed{-3}$ — ведущие элементы.

Обращу ваше внимание, что ширина «ступенек» может быть разной. Например, следующая матрица 4×5 также имеет ступенчатый вид:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь:

- ведущий элемент 1-й строки — в столбце 1;
- ведущий элемент 2-й строки — в столбце 2 (правее столбца 1);
- ведущий элемент 3-й строки — в столбце 4 (правее столбца 2).

«Пропуск» столбца 3 не нарушает определение ступенчатого вида — главное, чтобы каждый следующий ведущий элемент был **строго правее** предыдущего.

Если дополнительно потребовать, чтобы каждый ведущий элемент был равен 1 и был единственным ненулевым элементом в своём столбце (над ним тоже нули), то такая форма называется **приведённой ступенчатой** (reduced row echelon form). Её мы рассмотрим позже при решении систем.

1.1.2.4 Ранг матрицы

Ступенчатый вид матрицы не просто упрощает её структуру — он позволяет легко определить одну из важнейших характеристик матрицы: её **ранг**. Ранг показывает, сколько в матрице «независимых» строк или столбцов, то есть сколько строк (или столбцов) нельзя выразить через другие.

Определение 1.11. Рангом матрицы называется количество ненулевых строк в её ступенчатом виде (полученном элементарными преобразованиями строк).

Более формально: ранг — это максимальное число линейно независимых строк (или столбцов) матрицы. Он показывает, сколько «существенно различных» направлений задают строки матрицы в многомерном пространстве.

Иными словами, ранг отражает «истинное» количество информации, содержащейся в матрице, — сколько строк действительно добавляют новую информацию, не выражаемую через другие. Это ключевая характеристика: она помогает понять, насколько «полна» система уравнений, заданная матрицей, или сколько независимых параметров содержит набор данных.

Почему два подхода к определению ранга эквивалентны?

Разберём подробнее связь между ступенчатым видом и линейной независимостью:

- **Через ступенчатый вид:** при приведении к ступенчатому виду мы устраняем линейную зависимость между строками. Каждая ненулевая строка в результате содержит новый «ведущий элемент» (первый ненулевой элемент в строке), который нельзя получить комбинацией предыдущих строк. Эти ведущие элементы как бы «задают» новые направления в пространстве, не совпадающие с предыдущими.
- **Через линейную независимость:** если несколько строк линейно зависимы, одну из них можно выразить через остальные с помощью линейных операций (умножения на числа и сложения). В ступенчатом виде такая строка станет нулевой, что автоматически уменьшит ранг. Таким образом, количество ненулевых строк напрямую соответствует числу независимых строк.

Рассмотрим подробный пример вычисления ранга.

Пример 1.4

Пусть дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведём её к ступенчатому виду:

1. Вычтем из второй строки первую, умноженную на 2: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим: вторая строка стала нулевой — это признак линейной зависимости от первой строки.

2. Вычтем из третьей строки первую: $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Поменяем местами вторую и третью строки для правильного порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной ступенчатой матрице две ненулевые строки, следовательно, $\text{rang } A = 2$.

Проверим через линейную независимость строк исходной матрицы:

- Строка 1: $(1, 2, 3)$ — независима (базовый вектор).
- Строка 2: $(2, 4, 6) = 2 \cdot (1, 2, 3)$ — линейно зависима от первой (просто её удвоение).
- Строка 3: $(1, 1, 0)$ — не выражается через первую, значит, независима. Действительно, не существует такого числа k , чтобы $k \cdot (1, 2, 3) = (1, 1, 0)$.

Таким образом, действительно есть две линейно независимые строки, что подтверждает $\text{rang } A = 2$. Это согласуется с результатом, полученным через ступенчатый вид.

Замечание . Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях. Поэтому эквивалентные матрицы (связанные такими преобразованиями) всегда имеют одинаковый ранг. Именно это свойство позволяет использовать ступенчатый вид для вычисления ранга любой матрицы.

1.1.2.5 Теорема о приведении к ступенчатому виду

Возникает закономерный вопрос: всегда ли можно привести произвольную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований? Ответ на этот вопрос даёт фундаментальная теорема линейной алгебры.

Теорема 1.1. Любую ненулевую матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к эквивалентной ей ступенчатой матрице. ■

Идея доказательства (алгоритм Гаусса). Рассмотрим ненулевую матрицу A . Алгоритм приведения к ступенчатому виду основан на последовательном обнулении элементов под ведущими элементами в каждом столбце. Разберём его пошагово:

1. Находим первый (самый левый) столбец, содержащий ненулевой элемент. Перестановкой строк помещаем этот элемент в первую строку — он станет ведущим элементом первой строки.
2. Делим первую строку на этот элемент (если хотим получить ведущую единицу) или просто оставляем его в качестве ведущего.
3. С помощью преобразований $R_i \leftarrow R_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} R_1$ (для $i > 1$) обнуляем все элементы ниже ведущего в этом столбце. Это гарантирует, что в первом столбце под ведущим элементом будут только нули.
4. Переходим к подматрице, расположенной справа и снизу от обработанного ведущего элемента. Игнорируем уже обработанные строки и столбцы и повторяем процедуру для этой подматрицы: находим ведущий элемент, обнуляем элементы под ним и т.д.
5. Если в процессе появляются нулевые строки, их можно удалить из рассмотрения или перенести вниз матрицы — это не влияет на итоговый ступенчатый вид.

Так как на каждом шаге мы работаем с подматрицей меньшего размера, процесс гарантированно завершается за конечное число шагов. В результате получаем ступенчатую матрицу, эквивалентную исходной. □

Проиллюстрируем теорему на конкретном примере. Приведём матрицу A к

ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. В первом столбце ненулевые элементы стоят во второй и третьей строках. Переставим строки так, чтобы ненулевой элемент оказался на первом месте: $R_1 \leftrightarrow R_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Обнулим элемент под ведущим (в третьей строке, первый столбец). Для этого выполним преобразование $R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Переходим ко второму столбцу. Ведущий элемент во второй строке равен 2. Обнулим элемент под ним в третьей строке: $R_3 \leftarrow R_3 + \frac{0,5}{2}R_2 = R_3 + 0,25R_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -0,75 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица уже имеет ступенчатый вид: ведущие элементы находятся в столбцах 1, 2 и 3, и под ними — нули.

1.1.2.6 Практическое значение ступенчатых матриц

Умение приводить матрицу к ступенчатому виду — это фундаментальный навык в линейной алгебре, который не только лежит в основе вычисления ранга, но и открывает путь к решению множества прикладных задач. Так, метод Гаусса позволяет свести систему линейных уравнений к ступенчатой форме — после этого неизвестные легко найти с помощью обратного хода, что делает этот способ наиболее распространённым для решения систем в практических задачах. Кроме того, ступенчатый вид даёт самый простой и надёжный способ вычисления ранга матрицы: он равен числу ненулевых строк. Тот же подход помогает исследовать линейную зависимость строк или столбцов: в ступенчатой форме сразу видно, какие из них линейно независимы (ненулевые строки), а какие можно выразить через другие (нулевые или получающиеся комбинацией предыдущих). Ещё одно важное применение — вычисление определителей квадратных матриц:

для треугольной (ступенчатой) матрицы определитель равен произведению диагональных элементов, что значительно упрощает расчёты по сравнению с прямым разложением по строке или столбцу. Наконец, метод Гаусса–Жордана, основанный на приведении к ступенчатому виду, используется для построения обратной матрицы — а эта операция имеет ключевое значение во многих областях, от компьютерной графики до криптографии.

Перейдём к наглядному примеру, который продемонстрирует практическое применение этих идей. Рассмотрим задачу анализа данных о продажах в розничной сети:

Пример 1.5

Предположим, вы аналитик в крупной торговой сети. Вам предоставили данные о продажах трёх товаров (А, В, С) в трёх магазинах за один день:

Магазин	Товар А (шт.)	Товар В (шт.)	Товар С (шт.)
1	10	20	30
2	20	40	60
3	15	30	45

На первый взгляд, данные выглядят логично: в магазине 2 продажи выше, чем в магазине 1, а магазин 3 — промежуточный. Но давайте проверим, нет ли в этих данных скрытой закономерности или ошибки.

Шаг 1. Составление матрицы данных. Запишем данные в виде матрицы 3×3 :

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 40 & 60 \\ 15 & 30 & 45 \end{pmatrix}.$$

Каждая строка — данные по одному магазину, каждый столбец — продажи одного товара.

Шаг 2. Приведение к ступенчатому виду. Выполним элементарные преобразования строк:

1. Разделим первую строку на 10 для упрощения: $R_1 \leftarrow \frac{1}{10}R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 20 & 40 & 60 \\ 15 & 30 & 45 \end{pmatrix}.$$

2. Вычтем из второй строки 20-кратную первую строку: $R_2 \leftarrow R_2 - 20R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 15 & 30 & 45 \end{pmatrix}.$$

3. Вычтем из третьей строки 15-кратную первую строку: $R_3 \leftarrow R_3 - 15R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили ступенчатую матрицу, в которой только одна ненулевая строка.

Шаг 3. Определение ранга. Количество ненулевых строк равно 1, следовательно $\text{rank}(D) = 1$.

Шаг 4. Визуальный анализ взаимосвязей между товарами.

Математический анализ показал, что продажи товаров строго пропорциональны друг другу. Но как это выглядит на практике? Чтобы «увидеть» выявленную зависимость, визуализируем данные. Построим три графика, показывающих, как продажи товара В зависят от продаж товара А, товара С от товара А и товара С от товара В.

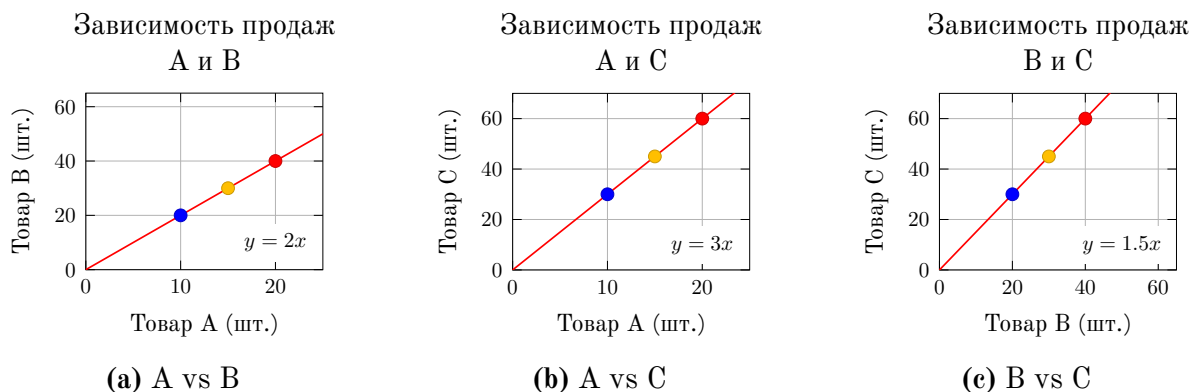


Рисунок 1.2. Графики парных зависимостей продаж товаров. Все точки лежат на прямых линиях, что подтверждает строгую линейную зависимость между продажами товаров.

Шаг 5. Анализ графиков и интерпретация результата.

Графики наглядно подтверждают наши расчёты:

- **Зависимость А–В:** все точки лежат на прямой $y = 2x$. Это означает, что продажи товара В всегда ровно в 2 раза превышают продажи товара А.

- **Зависимость А–С:** точки лежат на прямой $y = 3x$. Продажи товара С в 3 раза больше продаж товара А.
- **Зависимость В–С:** зависимость описывается прямой $y = 1.5x$. Продажи товара С в 1.5 раза больше продаж товара В.

Ранг 1 означает, что все строки матрицы линейно зависимы: вторая и третья строки пропорциональны первой. Действительно, вторая строка ровно в 2 раза больше первой, а третья — в 1,5 раза. Это говорит о строгой пропорциональности продаж: продажи товара В всегда в 2 раза больше продаж товара А, а продажи товара С — в 3 раза больше продаж товара А. Иными словами, для описания всех продаж достаточно знать только продажи товара А — остальные определяются автоматически.

Такой результат часто указывает на ошибку ввода данных (например, данные скопированы с шаблоном) или на искусственную выборку. В реальной торговой сети ранг матрицы продаж обычно равен числу товаров (или близок к нему), что отражает естественную независимость спроса на разные товары.

Этот пример наглядно демонстрирует, как понятия ступенчатого вида и ранга матрицы, дополненные визуализацией, помогают выявлять скрытые зависимости и аномалии в реальных данных. Графики позволяют быстро оценить характер связи между переменными и подтвердить математические выводы наглядными средствами.

1.1.3 Действия над матрицами

Теперь, когда мы умеем приводить матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований, мы полностью подготовлены к изучению основных действий над матрицами: сложения, умножения на число и умножения матриц. Именно эти операции позволяют матрицам стать рабочим инструментом для решения широкого круга задач.

В этом разделе мы подробно рассмотрим основные операции над матрицами: сложение, умножение на число и умножение матриц. Для каждой операции дадим строгое определение, приведём наглядные примеры и перечислим основные свойства.

1.1.3.1 Сложение матриц

Сложение вводится только для матриц одинаковой размерности.

Определение 1.12. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$ того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B :

$$C = (c_{ij}), \quad \text{где } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Пример 1.6

Пусть даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда их сумма:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+(-1) & 5+2 \\ 2+3 & 4+1 & 6+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Свойства сложения матриц

Операция сложения матриц, подобно сложению чисел, подчиняется ряду естественных алгебраических правил. Эти свойства не только делают работу с матрицами более удобной, но и отражают глубокую связь между различными математическими структурами. Рассмотрим их последовательно — так, как они естественным образом возникают при изучении операций над матрицами.

Начнём с самого интуитивно понятного свойства. Когда мы складываем два числа, порядок слагаемых не имеет значения: $2 + 3$ даёт тот же результат, что и $3 + 2$. Точно так же обстоит дело и с матрицами — это свойство получило название **коммутативности**, или переместительного свойства, поскольку слагаемые можно «перемещать» местами без изменения результата:

$$A + B = B + A.$$

Чтобы увидеть это свойство в действии, рассмотрим простой пример.

Пример 1.7

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Выполним сложение в обоих порядках:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix},$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 5+1 & 6+2 \\ 7+3 & 8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Как видим, результаты полностью совпадают — коммутативность на матрицах работает так же надёжно, как и на числах.

Перейдём к следующему свойству. Когда слагаемых больше двух, нам часто приходится группировать их с помощью скобок. Удобно, если результат не будет зависеть от того, как именно мы расставим эти скобки. Такое свойство называется **ассоциативностью**, или сочетательным свойством:

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Оно позволяет не заботиться о порядке выполнения операций при сложении нескольких матриц и даже опускать скобки, когда это не вызывает неоднозначности.

Проиллюстрируем ассоциативность на том же примере, добавив третью матрицу:

Пример 1.8

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Сначала вычислим $(A + B) + C$:

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Теперь $A + (B + C)$:

$$B + C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}, \quad A + (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

Результаты вновь совпадают, подтверждая, что ассоциативность действительно выполняется.

В арифметике есть особое число — ноль, прибавление которого к любому числу не меняет его. И как мы знаем, среди матриц существует особая матрица, вы-

полняющая ту же роль. Она называется **нулевой матрицей** и состоит целиком из нулей. Свойство её существования формулируется просто:

$$A + 0 = A,$$

где 0 — нулевая матрица того же размера, что и A . Это свойство иногда называют существованием нейтрального элемента относительно сложения.

Для нашей матрицы A это выглядит так:

$$A + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A.$$

Нулевая матрица действительно не вносит никаких изменений в исходную матрицу при сложении.

Продолжая аналогию с числами, вспомним, что для каждого числа x существует противоположное $-x$, такое что их сумма равна нулю. Точно так же для любой матрицы A можно построить матрицу $-A$, элементы которой противоположны элементам A . Сложение матрицы с противоположной даёт нулевую матрицу — это свойство называют существованием противоположного элемента:

$$A + (-A) = 0.$$

Для матрицы A из наших примеров:

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad A + (-A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Таким образом, операции сложения матриц подчиняются тем же фундаментальным правилам, что и сложение чисел: коммутативности, ассоциативности, наличию нуля и противоположных элементов. Математики говорят, что множество матриц фиксированного размера $m \times n$ образует *абелеву (коммутативную) группу* относительно сложения.

Это означает, что при сложении матриц мы можем:

- свободно менять порядок слагаемых: $A + B = B + A$;
- группировать матрицы в любом порядке: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- решать уравнения вида $X + A = B$, находя $X = B - A$;
- использовать привычные алгебраические преобразования, не опасаясь «подводных камней».

Важно помнить: эти удобные свойства работают только для сложения матриц. Умножение матриц ведёт себя иначе (оно некоммукативно), что мы увидим далее.

1.1.3.2 Умножение матрицы на число

Операция умножения матрицы на число — одна из базовых в линейной алгебре. Она интуитивно понятна и во многом напоминает умножение чисел, но применяется сразу ко всем элементам матрицы. Разберём это понятие подробно.

Определение 1.13. Пусть дана матрица $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ и некоторое число k . Произведением матрицы A на число k называется новая матрица $B = kA$ того же размера $m \times n$, каждый элемент b_{ij} которой получается умножением соответствующего элемента исходной матрицы a_{ij} на число k :

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Иными словами, при умножении матрицы на число мы «масштабируем» все её элементы на один и тот же коэффициент k , не меняя размерности матрицы.

Чтобы лучше понять это определение, представим матрицу как таблицу чисел. Умножение на число k означает, что мы умножаем каждое число в этой таблице на k , получая новую таблицу того же размера.

Пример 1.9

Умножим матрицу A на число 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 12 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Как видим, каждый элемент исходной матрицы умножен на 3, а размер матрицы остался прежним — 3×2 .

1.1.3.3 Свойства умножения матрицы на число

Эта операция обладает рядом важных свойств, которые делают работу с матрицами удобной и предсказуемой. Рассмотрим их последовательно, сопровождая пояснениями.

Для любых матриц A, B одинакового размера и любых чисел α, β выполняются следующие свойства:

1. **Нейтральность единицы:** $1 \cdot A = A$. Умножение матрицы на единицу не меняет её — это естественное свойство, аналогичное умножению чисел на 1.

2. **Дистрибутивность относительно сложения матриц:** $\alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$. Это свойство позволяет «раскрывать скобки»: умножение числа на сумму матриц равно сумме произведений этого числа на каждую матрицу.

Пример 1.10

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 2.$$

Тогда:

$$2 \cdot (A + B) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 20 & 24 \end{pmatrix},$$

$$2A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}.$$

Результаты совпадают.

3. **Дистрибутивность относительно сложения чисел:** $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$. Здесь мы можем «распределить» матрицу между слагаемыми числами: умножение суммы чисел на матрицу равно сумме произведений каждого числа на матрицу.

Пример 1.11

Возьмём $\alpha = 2$, $\beta = 3$, A — как выше:

$$(2 + 3) \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix},$$

$$2A + 3A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}.$$

Свойство выполняется.

4. **Ассоциативность относительно умножения чисел:** $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$. Порядок умножения чисел не влияет на результат: можно сначала умножить матрицу на одно число, а затем на другое, или сразу на их произведение.

Пример 1.12

Пусть $\alpha = 2$, $\beta = 3$, A — та же матрица:

$$2 \cdot (3A) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{pmatrix},$$

$$(2 \cdot 3) \cdot A = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{pmatrix}.$$

Результаты идентичны.

Подводя итог, можем сказать что совокупность этих свойств вместе со свойствами сложения матриц означает, что множество всех матриц размера $m \times n$ образует *линейное (векторное) пространство* над полем действительных чисел. Это фундаментальный факт, который лежит в основе многих разделов математики и её приложений — от решения систем линейных уравнений до компьютерной графики и машинного обучения. Линейные пространства позволяют использовать единую алгебраическую структуру для работы с самыми разными объектами: векторами, матрицами, функциями и т.д.

1.1.3.4 Произведение двух матриц

Перейдём теперь к самой важной и, пожалуй, наиболее интересной операции — умножению матриц. Если сложение и умножение на число интуитивно понятны, то умножение матриц на первый взгляд может показаться необычным. Однако именно оно позволяет компактно записывать системы линейных уравнений, моделировать композицию преобразований пространства и решать множество прикладных задач.

Прежде чем приступить к определению, необходимо понять, когда две матрицы вообще можно перемножить. Оказывается, для этого требуется выполнение специального условия — **согласованности**.

Что значит «согласованные матрицы»?

Представьте, что у нас есть две матрицы: A размера $m \times n$ и B размера $p \times q$. Умножить A на B (именно в таком порядке!) можно только в том случае, если число столбцов первой матрицы (n) равно числу строк второй матрицы (p). Другими словами, внутренние размерности должны совпадать. Такие матрицы называют **согласованными**.

Формальная запись: $A_{m \times n}$ и $B_{n \times k}$ — согласованы, и результатом будет матрица $C_{m \times k}$.

Как проверить согласованность на практике?

Очень просто — выпишите размеры рядом. Если средние числа равны — можно умножать. Например:

- $A_{2 \times 3}$ и $B_{3 \times 4}$ — согласованы (в середине $3 = 3$), получим матрицу 2×4 ;
- $A_{4 \times 2}$ и $B_{2 \times 5}$ — согласованы, результат 4×5 ;
- $A_{3 \times 4}$ и $B_{5 \times 2}$ — не согласованы ($4 \neq 5$), умножение невозможно.

Квадратные матрицы одного порядка всегда согласованы, так как $n \times n$ и $n \times n$ — внутренние размеры совпадают.

Определение 1.14. Произведением двух согласованных матриц $A_{m \times n}$ и $B_{n \times k}$ называется матрица $C_{m \times k}$, элемент которой c_{ij} , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, вычисляется по правилу:

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Иными словами, мы берём i -ю строку матрицы A и j -й столбец матрицы B , перемножаем соответствующие элементы и складываем результаты. Это правило часто называют «строка на столбец».

Пошаговый план вычисления элемента c_{ij} :

1. Выделяем i -ю строку матрицы A : $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$.
2. Выделяем j -й столбец матрицы B : $(b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj})$.
3. Перемножаем элементы с одинаковыми номерами: $a_{i1}b_{1j}, a_{i2}b_{2j}, \dots, a_{in}b_{nj}$.
4. Складываем все полученные произведения — это и есть c_{ij} .

Пример 1.13

Найдём произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}_{3 \times 2}.$$

Шаг 1. Проверка согласованности. Размеры: $A_{2 \times 3}$, $B_{3 \times 2}$ — внутренние размеры совпадают ($3 = 3$), значит, умножение возможно.

Шаг 2. Определение размера результата. Результат будет иметь размер 2×2 (строк как у A , столбцов как у B).

Шаг 3. Вычисление элементов. Проиллюстрируем процесс вычисления на схеме ниже. Для каждого элемента матрицы-результата мы:

- берём соответствующую строку из матрицы A ;

- берём соответствующий столбец из матрицы B ;
- перемножаем соответствующие элементы и суммируем результаты.

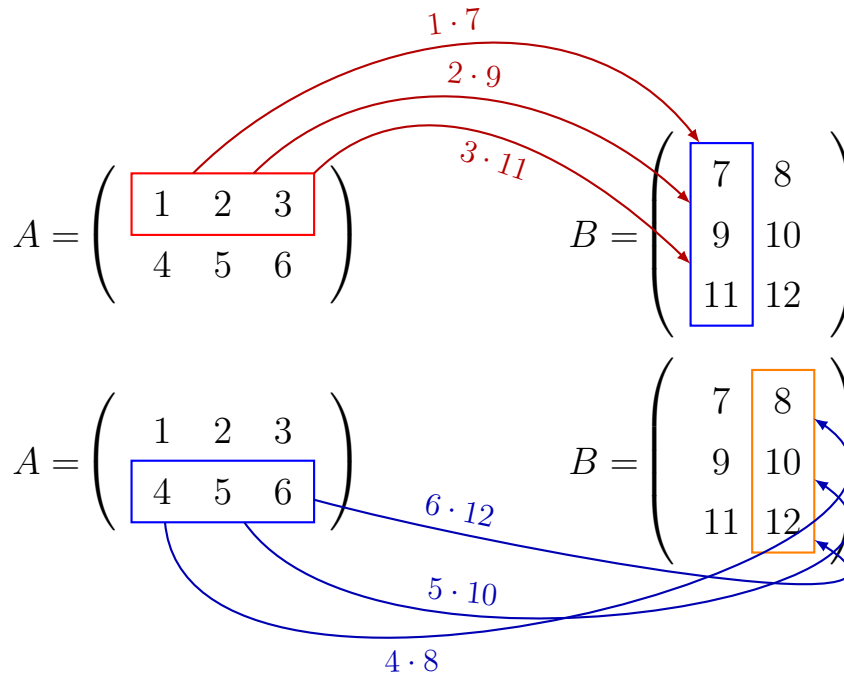


Рисунок 1.3. Визуализация вычисления произведения AB : цветом выделены строки A и столбцы B , участвующие в формировании элементов результата. Красные стрелки показывают вычисление c_{11} , зелёные — c_{22} .

Продолжим вычисления по тому же принципу:

- c_{11} : первая строка A (1, 2, 3) и первый столбец B (7, 9, 11):

$$c_{11} = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 = 7 + 18 + 33 = 58.$$

- c_{12} : первая строка A и второй столбец B (8, 10, 12):

$$c_{12} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 = 8 + 20 + 36 = 64.$$

- c_{21} : вторая строка A (4, 5, 6) и первый столбец B :

$$c_{21} = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 = 28 + 45 + 66 = 139.$$

- c_{22} : вторая строка A и второй столбец B :

$$c_{22} = 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 = 32 + 50 + 72 = 154.$$

Таким образом,

$$AB = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}.$$

Свойства произведения матриц.

Умножение матриц обладает рядом важных алгебраических свойств, которые делают его удобным инструментом. Для любых матриц подходящих размеров выполняются:

1. **Ассоциативность:** $(AB)C = A(BC)$. Это позволяет не расставлять скобки при умножении нескольких матриц.
2. **Дистрибутивность слева:** $(A + B)C = AC + BC$.
3. **Дистрибутивность справа:** $A(B + C) = AB + AC$.
4. **Сочетание с умножением на число:** $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$.

Однако есть одно кардинальное отличие от умножения чисел: **умножение матриц некоммукативно**. В общем случае $AB \neq BA$. Более того, произведение AB может быть определено, а BA — не существовать из-за несовпадения размеров. Это свойство следует запомнить — оно часто приводит к неожиданным результатам в вычислениях.

1.1.3.5 Возведение квадратной матрицы в степень

Теперь, когда мы освоили операцию умножения матриц, логично задаться вопросом: а можно ли умножить матрицу саму на себя несколько раз? Да, такая операция существует — она называется (наберите воздухом грудь!) **возведением в степень**. Важно отметить, что она имеет смысл только для квадратных матриц: в противном случае при повторном умножении размерности матриц перестанут совпадать, и операция станет невозможной.

Определение 1.15. Пусть A — квадратная матрица порядка n , а k — натуральное число, $k \geq 2$. Тогда k -й степенью матрицы A называется произведение

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ раз}}.$$

Дополнительно по определению полагают:

- $A^1 = A$;
- $A^0 = E$, где E — единичная матрица того же порядка, что и A .

Возведение матрицы в степень — не просто абстрактная математическая операция. Она широко применяется на практике, например:

- при моделировании дискретных стохастических процессов (в частности, цепей Маркова);
- в теории графов для подсчёта количества путей заданной длины между вершинами;
- в вычислительной математике при решении систем линейных уравнений итерационными методами;
- в компьютерной графике и машинном обучении при работе с линейными преобразованиями.

Проиллюстрируем процесс возведения матрицы в степень на конкретном примере.

Пример 1.14

Вычислим A^2 и A^3 для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Вычисление $A^2 = A \cdot A$. Выполняем умножение матрицы на саму себя:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Вычисление $A^3 = A^2 \cdot A$. Теперь умножаем полученную матрицу A^2 на исходную матрицу A :

$$A^3 = \begin{pmatrix} 7 \cdot 1 + 10 \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 10 \cdot 4 \\ 15 \cdot 1 + 22 \cdot 3 & 15 \cdot 2 + 22 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы последовательно получили вторую и третью степени матрицы A .

1.1.3.6 Транспонирование матрицы

Перейдём к ещё одной важной операции над матрицами — **транспонированию**. В отличие от сложения или умножения, это не арифметическая операция, а структурное преобразование матрицы. Тем не менее она часто встречается в приложениях:

- при выводе формул метода наименьших квадратов в статистике;
- в теории двойственных пространств в линейной алгебре;
- при решении задач оптимизации;
- в обработке сигналов и изображений.

Определение 1.16. Транспонированной матрицей для матрицы A размера $m \times n$ называется матрица A^T размера $n \times m$, у которой строки исходной матрицы становятся столбцами, а столбцы — строками. Формально: если $A = (a_{ij})$, то $A^T = (a_{ji})$.

Запомнить процесс транспонирования очень просто: представьте, что вы «переворачиваете» матрицу относительно её главной диагонали. При этом:

- первая строка исходной матрицы становится первым столбцом транспонированной;
- вторая строка — вторым столбцом;
- и так далее, пока все строки не превратятся в столбцы.

Пример 1.15

Рассмотрим конкретный пример. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

транспонированная матрица будет иметь вид

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}.$$

Как видим, строки матрицы A действительно превратились в столбцы матрицы A^T .

Свойства транспонирования:

Операция транспонирования обладает рядом важных свойств, которые часто используются при преобразованиях матричных выражений:

- $(A^T)^T = A$ — двойное транспонирование возвращает исходную матрицу (операция обратима).
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ — транспонирование суммы равно сумме транспонированных матриц.
- $(AB)^T = B^T A^T$ — при транспонировании произведения матриц порядок множителей меняется на обратный (это свойство особенно важно и часто приводит к ошибкам, если его забыть).
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ для любого числа α — скаляр можно выносить за знак транспонирования.

Теперь, когда мы изучили основные понятия и операции линейной алгебры в контексте матриц — сложение, умножение (в том числе на скаляр), транспонирование и его свойства, а также познакомились с такими важными характеристиками матриц, как ранг и ступенчатый вид, — пришло время применить эти знания на практике.

Освоенные инструменты образуют мощный набор для анализа и преобразования данных: с их помощью можно компактно записывать сложные взаимосвязи, упрощать громоздкие выражения, выявлять скрытые закономерности (например, линейную зависимость между элементами) и строить прогнозы. Матричный аппарат позволяет формализовать реальные задачи — от экономических моделей до обработки данных — и решать их систематизированным, алгоритмичным способом.

Рассмотрим пример, который комплексно задействует большинство изученных методов. Мы последовательно:

- составим матрицу на основе исходных данных;
- применим элементарные преобразования для приведения её к ступенчатому виду;

- вычислим ранг матрицы и интерпретируем результат;
- проанализируем линейную зависимость строк или столбцов;
- используем другие освоенные операции для проверки выводов и углублённого анализа.

Этот пример покажет, как отдельные понятия и операции складываются в единую методологию — и как с её помощью можно решать прикладные задачи, выявляя структуру данных и делая обоснованные выводы на основе формальных расчётов.

Пример 1.16

Постановка задачи: что у нас есть и что нужно сделать?

Предположим, что экономика страны состоит из трёх отраслей: сельское хозяйство (А), промышленность (П) и услуги (У). Для каждой отрасли известны:

- объём выпуска (в миллиардах рублей) за два квартала;
- структура внутреннего потребления (какая доля продукции каждой отрасли потребляется внутри других отраслей);
- плановые показатели на следующий квартал.

На круговой диаграмме ниже показано распределение общего выпуска по отраслям за первый квартал (сумма: $150 + 280 + 310 = 740$ млрд руб.):

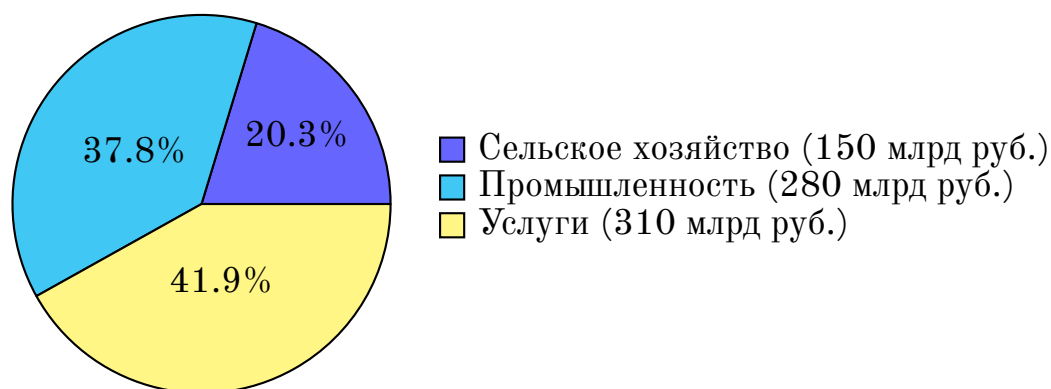


Рисунок 1.4. Распределение выпуска по отраслям в первом квартале (млрд руб.).

Как видим, услуги формируют почти 42% экономики, промышленность — 38%, сельское хозяйство — около 20%.

Аналогия для понимания: представьте, что каждая отрасль — это кухня в большом ресторане. Кухня А (сельское хозяйство) поставяет овощи, кухня П (промышленность) — посуду и оборудование, кухня У (услуги) — официантов и бухгалтеров. Часть продуктов каждая кухня использует сама, часть отдаёт другим. Наша задача — понять, сколько нужно закупить продуктов «на сторону», чтобы накормить всех гостей.

Иными словами, мы должны проанализировать данные, проверить их на непротиворечивость и подготовить прогноз, используя матричный аппарат.

Как мы будем действовать?

Чтобы анализ был понятным и структурированным, разобьём его на последовательные шаги — от данных к прогнозу:

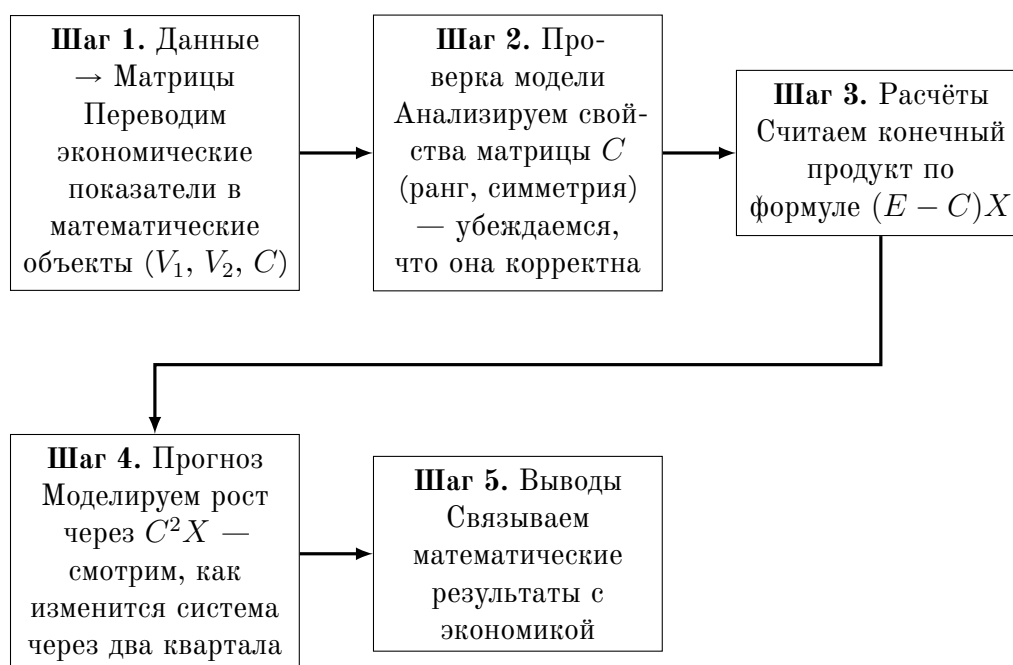


Рисунок 1.5. Блок-схема логики анализа: последовательность шагов от данных к экономическим выводам.

После того как мы определили план действий, приступим к его реализации. Начнём с перевода экономических показателей в язык матриц.

Шаг 1. Представление данных в виде матриц

Выпуск продукции по отраслям за первый квартал (в млрд руб.):

$$V_1 = (150 \quad 280 \quad 310)$$

(вектор-строка размера 1×3). Здесь:

- 150 млрд руб. — выпуск сельского хозяйства (А);

- 280 млрд руб. — выпуск промышленности (П);
- 310 млрд руб. — выпуск услуг (У).

За второй квартал:

$$V_2 = (160 \quad 300 \quad 320) .$$

Технологическая матрица и её структура

Теперь, когда у нас есть данные о выпуске, важно понять, как отрасли взаимодействуют между собой. Ведь экономика — это не просто сумма трёх независимых производств, а сложная система взаимосвязей.

Эти взаимосвязи описывает **технологическая матрица** (или матрица коэффициентов прямых затрат). Она показывает, сколько продукции каждой отрасли требуется для производства единицы продукции другой отрасли. Иными словами, матрица C отражает структуру межотраслевых потоков ресурсов.

Технологическая матрица C — коэффициенты прямых затрат			
Отрасль-поставщик	Отрасль-потребитель		
	А (Сельское хоз.)	П (Промышленность)	У (Услуги)
А (Сельское хоз.)	0.1	0.3	0.2
П (Промышленность)	0.2	0.1	0.4
У (Услуги)	0.1	0.2	0.1

Рисунок 1.6. Матрица C : каждый элемент c_{ij} — сколько продукции отрасли-поставщика (строки) нужно для выпуска единицы продукции отрасли-потребителя (столбец).

Математически эту матрицу можно записать в компактной форме:

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} .$$

Как читать эту матрицу?

Каждый элемент c_{ij} имеет чёткое экономическое значение:

- i — номер строки (отрасль, которая *поставляет* продукцию);
- j — номер столбца (отрасль, которая *потребляет* продукцию);
- c_{ij} — количество продукции отрасли i , необходимое для выпуска *единицы* продукции отрасли j .

Проиллюстрируем на конкретных примерах

Рассмотрим подробнее потребности каждой отрасли:

- **Столбец 1 (Сельское хозяйство):** для производства 1 млрд руб. сельхоз-продукции нужно:
 - 0.1 ед. сельхозпродукции (удобрения, корма);
 - 0.2 ед. промышленных товаров (тракторы, топливо);
 - 0.1 ед. услуг (консультации, логистика).
- **Столбец 2 (Промышленность):** для производства 1 млрд руб. промышленной продукции нужно:
 - 0.3 ед. сельхозпродукции (сырьё);
 - 0.1 ед. промышленных товаров (оборудование);
 - 0.2 ед. услуг (логистика, маркетинг).
- **Столбец 3 (Услуги):** для производства 1 млрд руб. услуг нужно:
 - 0.2 ед. сельхозпродукции;
 - 0.4 ед. промышленных товаров;
 - 0.1 ед. других услуг.

Практический смысл: расчёт потребностей отрасли

Давайте посмотрим, как эти коэффициенты работают на практике. Предположим, промышленность планирует выпустить 100 млрд руб. продукции. Для расчёта необходимых ресурсов используем вторую колонку матрицы C (она соответствует промышленности):

- От сельского хозяйства: $c_{12} \times 100 = 0.3 \times 100 = 30$ млрд руб.;
- От промышленности: $c_{22} \times 100 = 0.1 \times 100 = 10$ млрд руб. (оборудование, энергия);
- От услуг: $c_{32} \times 100 = 0.2 \times 100 = 20$ млрд руб. (логистика, бухгалтерия).

Итого для выпуска 100 млрд руб. промышленной продукции потребуется $30 + 10 + 20 = 60$ млрд руб. ресурсов от других отраслей. Остальные 40 млрд руб. составят конечный продукт (то, что пойдёт на рынок).

Контрольный вопрос для самопроверки

А теперь попробуйте самостоятельно применить полученные знания. Сколько ресурсов потребуется сельскому хозяйству для выпуска 200 млрд руб. продукции? Проверьте расчётом, используя первую колонку матрицы C .

Шаг 2. Анализ технологической матрицы: ранг и независимость отраслей

Прежде чем переходить к расчётам, важно убедиться, что матрица C корректна — то есть что отрасли действительно независимы по структуре затрат. Для этого исследуем, нет ли в технологической матрице скрытой линейной зависимости. Иными словами, можно ли одну отрасль выразить через другие? Если бы такая зависимость существовала, то экономика была бы избыточна, и одна из отраслей фактически дублировала бы другие.

Для проверки приведём C к ступенчатому виду и найдём её ранг. Напомним, что ранг — это количество ненулевых строк в ступенчатой форме. Если ранг окажется меньше трёх, это будет означать линейную зависимость.

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Умножим все строки на 10 (элементарное преобразование — умножение строки на число, оно не меняет ранг):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним преобразования: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь $R_3 \leftarrow R_3 - 0.2R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вывод: все три строки ненулевые, следовательно $\text{rank}(C) = 3$. Матрица C имеет полный ранг — отрасли действительно независимы по структуре затрат. Это важный результат: экономика не избыточна, каждая отрасль вносит уникальный вклад.

Шаг 3. Расчёт прямых затрат и конечного продукта

Теперь перейдём к главной цели — определить, сколько продукции каждой отрасли идёт на внутреннее потребление, а сколько остаётся для конечного использования (рынок, экспорт, накопление). Для этого воспользуемся **моделью межотраслевого баланса Леонтьева**. Ключевая идея модели: выпуск отрасли распределяется на две части:

1. **Внутреннее потребление** — продукция, израсходованная другими отраслями и самой отраслью для производства. Рассчитывается как CX , где X — вектор выпуска.
2. **Конечный продукт** — продукция, которая выходит за пределы производственной системы. Рассчитывается как $X - CX = (E - C)X$, где E — единичная матрица.

Итак, начнём с первого квартала.

Расчёт для первого квартала (V_1)

Сначала найдём внутреннее потребление. Умножим технологическую матрицу C на вектор выпуска V_1^T (транспонируем, чтобы выполнить умножение матрицы на вектор-столбец):

$$CV_1^T = \begin{pmatrix} 0.1 \cdot 150 + 0.3 \cdot 280 + 0.2 \cdot 310 \\ 0.2 \cdot 150 + 0.1 \cdot 280 + 0.4 \cdot 310 \\ 0.1 \cdot 150 + 0.2 \cdot 280 + 0.1 \cdot 310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 + 84 + 62 = 161 \\ 30 + 28 + 124 = 182 \\ 15 + 56 + 31 = 102 \end{pmatrix}.$$

Разберём первый элемент подробно: 161 млрд руб. — это суммарные ресурсы, которые «съедает» система для обеспечения выпуска 150 млрд руб. сельхозпродукции:

- $0.1 \times 150 = 15$ млрд руб. — собственное потребление сельского хозяйства (удобрения, корма);
- $0.3 \times 280 = 84$ млрд руб. — потребление от промышленности (тракторы, топливо);
- $0.2 \times 310 = 62$ млрд руб. — потребление от сферы услуг (логистика, консультации).

Теперь рассчитаем конечный продукт для первого квартала:

$$V_1^T - CV_1^T = \begin{pmatrix} 150 - 161 = -11 \\ 280 - 182 = 98 \\ 310 - 102 = 208 \end{pmatrix}.$$

Экономическая интерпретация:

- **Сельское хозяйство (–11 млрд руб.):** дефицит ресурсов. Отрасль потребляет больше, чем производит. Это может означать, что она использует запасы или получает поддержку извне. Для устойчивого развития нужно либо увеличить выпуск, либо снизить затраты.
- **Промышленность (98 млрд руб.):** стабильная отрасль, почти 35% продукции идёт на рынок.
- **Услуги (208 млрд руб.):** самая эффективная отрасль — более 67% услуг доступно для конечного потребления.

Расчёт для второго квартала (V_2)

Повторим те же вычисления для второго квартала, чтобы увидеть динамику.

Внутреннее потребление:

$$CV_2^T = \begin{pmatrix} 0.1 \cdot 160 + 0.3 \cdot 300 + 0.2 \cdot 320 \\ 0.2 \cdot 160 + 0.1 \cdot 300 + 0.4 \cdot 320 \\ 0.1 \cdot 160 + 0.2 \cdot 300 + 0.1 \cdot 320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 + 90 + 64 = 170 \\ 32 + 30 + 128 = 190 \\ 16 + 60 + 32 = 108 \end{pmatrix}.$$

Конечный продукт:

$$\begin{pmatrix} 160 - 170 = -10 \\ 300 - 190 = 110 \\ 320 - 108 = 212 \end{pmatrix}.$$

Что изменилось?

- **Сельское хозяйство:** дефицит сократился с –11 до –10 млрд руб. — улучшение, но проблема сохраняется.
- **Промышленность:** конечный продукт вырос с 98 до 110 млрд руб. — рост на 12 млрд руб.
- **Услуги:** рост с 208 до 212 млрд руб. — небольшая, но положительная динамика.

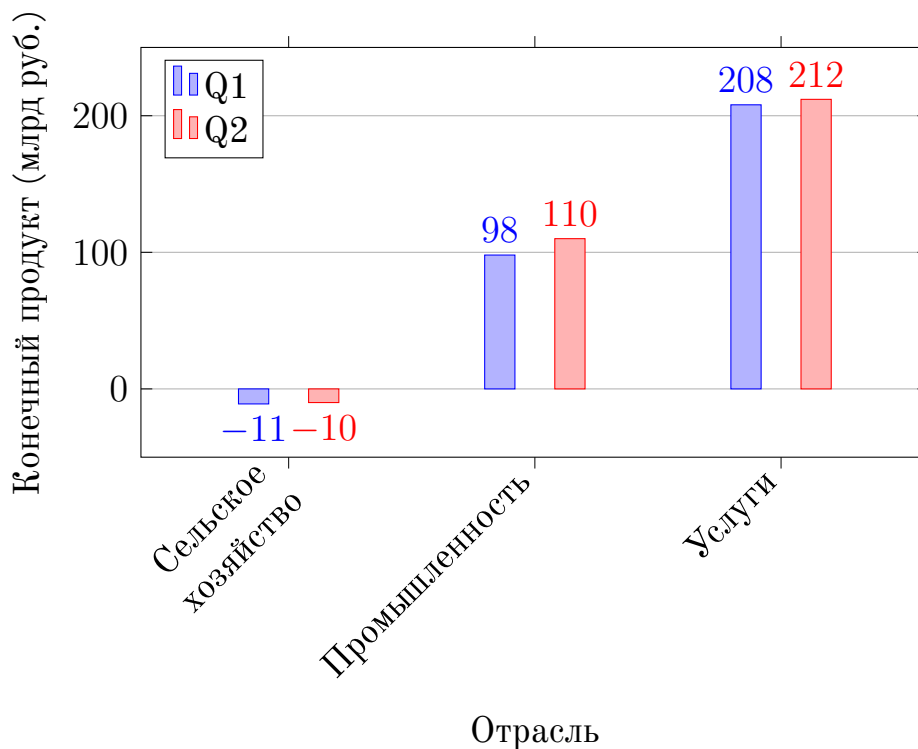


Рисунок 1.7. Конечный продукт по отраслям в первом (синий) и втором (красный) кварталах. Отрицательные значения для сельского хозяйства указывают на дефицит.

Шаг 4. Прогнозирование на третий квартал

Имея данные за два квартала, можно попытаться предсказать показатели на следующий квартал. Для простоты предположим, что темпы роста сохранятся. Вычислим среднее арифметическое приростов:

$$V_3 = V_2 + \frac{V_2 - V_1}{2} = (165 \quad 310 \quad 330).$$

(Здесь мы берём половину прироста, чтобы сгладить возможные колебания.)

Теперь рассчитаем для прогнозируемого выпуска внутреннее потребление и конечный продукт.

Внутреннее потребление:

$$CV_3^T = \begin{pmatrix} 0.1 \cdot 165 + 0.3 \cdot 310 + 0.2 \cdot 330 \\ 0.2 \cdot 165 + 0.1 \cdot 310 + 0.4 \cdot 330 \\ 0.1 \cdot 165 + 0.2 \cdot 310 + 0.1 \cdot 330 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.5 + 93 + 66 = 175.5 \\ 33 + 31 + 132 = 196 \\ 16.5 + 62 + 33 = 111.5 \end{pmatrix}.$$

Конечный продукт:

$$V_3^T - CV_3^T = \begin{pmatrix} 165 - 175.5 = -10.5 \\ 310 - 196 = 114 \\ 330 - 111.5 = 218.5 \end{pmatrix}.$$

Прогнозная интерпретация:

- Сельское хозяйство: дефицит сохраняется на уровне около -10.5 млрд руб., но не ухудшается.
- Промышленность: рост конечного продукта до 114 млрд руб. — устойчивая положительная динамика.
- Услуги: продолжение роста до 218.5 млрд руб. — отрасль остаётся локомотивом экономики.

Шаг 5. Анализ косвенных эффектов — возведение в степень

До сих пор мы учитывали только прямые затраты (один шаг производственной цепочки). Однако в реальной экономике влияние одной отрасли на другую распространяется и косвенно, через промежуточные звенья. Например, рост выпуска в сельском хозяйстве увеличивает спрос на удобрения (прямой эффект), а для производства удобрений нужно больше энергии (косвенный эффект второго порядка).

Чтобы оценить эти косвенные связи, возведём матрицу C в квадрат. Матрица C^2 показывает, сколько продукции одной отрасли потребуется для выпуска единицы продукции другой отрасли через два производственных цикла.

Вычислим $C^2 = C \cdot C$ (подробно разберём каждый элемент):

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.10 & 0.16 \\ 0.08 & 0.15 & 0.12 \\ 0.06 & 0.07 & 0.11 \end{pmatrix}.$$

(Промежуточные вычисления опущены для краткости — они были приведены ранее.)

Что показывают эти числа?

- Все коэффициенты C^2 меньше, чем соответствующие коэффициенты C (например, $0.16 < 0.2$). Это говорит о **затухании эффектов**: чем длиннее цепочка, тем слабее влияние. Экономика устойчива, лавинообразного нарастания нет.

- Самый сильный косвенный эффект — влияние услуг на сельское хозяйство (0.16). Это объясняется тем, что услуги (логистика, страхование) необходимы на каждом этапе производства.
- Промышленность имеет высокое самовлияние (0.15) — отражает замкнутость промышленного цикла (оборудование → продукция → новое оборудование).

Рассчитаем косвенные затраты для первого квартала:

$$C^2 V_1^T = \begin{pmatrix} 0.09 \cdot 150 + 0.10 \cdot 280 + 0.16 \cdot 310 \\ 0.08 \cdot 150 + 0.15 \cdot 280 + 0.12 \cdot 310 \\ 0.06 \cdot 150 + 0.07 \cdot 280 + 0.11 \cdot 310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 91.1 \\ 91.2 \\ 62.7 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что для обеспечения выпуска первого квартала через два производственных цикла потребуется дополнительно 91.1 млрд руб. сельхозпродукции, 91.2 млрд руб. промышленной продукции и 62.7 млрд руб. услуг. Эти цифры важны для долгосрочного планирования.

$$C^2 = \begin{pmatrix} & \text{макс. влияние (услуги} \rightarrow \text{сельское хоз-во)} \\ 0.09 & 0.10 & \boxed{0.16} \\ 0.08 & 0.15 & 0.12 \\ \boxed{0.06} & 0.07 & 0.11 \\ \text{мин. влияние (услуги} \rightarrow \text{сельское хоз-во)} \end{pmatrix}$$

Рисунок 1.8. Матрица косвенных затрат C^2 . Красным выделено максимальное косвенное влияние, синим — минимальное.

Шаг 6. Обобщающие выводы

Подведём итог нашему анализу. Мы последовательно прошли все этапы:

1. Перевели экономические данные в матричную форму.
2. Проверили технологическую матрицу на независимость отраслей (ранг = 3).
3. Рассчитали прямые затраты и конечный продукт для двух кварталов, выявили дефицит в сельском хозяйстве и эффективность услуг.
4. Построили прогноз на третий квартал.

5. Оценили косвенные эффекты с помощью C^2 и убедились в затухании влияний.

Ключевые выводы для экономики:

- Сельское хозяйство нуждается в поддержке — оно работает с хроническим дефицитом.
- Промышленность стабильно растёт, её конечный продукт увеличивается.
- Услуги — самый эффективный сектор, он обеспечивает более половины конечного продукта.
- Система устойчива: косвенные эффекты затухают, нет риска цепной реакции.

Этот пример наглядно демонстрирует, как абстрактные матричные операции (сложение, умножение, возведение в степень, нахождение ранга) работают в реальной экономической задаче. Вы увидели, что:

- матрицы позволяют компактно хранить данные о межотраслевых потоках;
- элементарные преобразования и ранг помогают проверить независимость отраслей;
- умножение матрицы на вектор даёт внутреннее потребление;
- возведение в степень моделирует долгосрочные косвенные эффекты.

Таким образом, вы освоили полный цикл применения матричного аппарата — от постановки задачи до интерпретации результатов. Эти навыки пригодятся вам не только в экономике, но и в других областях, где требуется анализ сложных систем.

Итоги раздела

Подводя итог нашему знакомству с матрицами, перечислим ключевые идеи, которые мы освоили.

- **Что такое матрица.** Мы узнали, что матрица — это прямоугольная таблица чисел, имеющая строгую структуру строк и столбцов. Матрицы позволяют компактно хранить данные, описывать линейные преобразования и решать системы уравнений.
- **Виды квадратных матриц.** Особое внимание уделили квадратным матрицам: диагональным, симметричным, треугольным, единичной и нулевой. Каждый

из этих типов обладает уникальными свойствами, которые упрощают вычисления и анализ.

- **Элементарные преобразования и ступенчатый вид.** Мы научились с помощью простых операций над строками (перестановка, удаление нулевых строк, умножение на число, прибавление другой строки) приводить любую матрицу к ступенчатому виду. Это позволило ввести понятие **ранга** — количества ненулевых строк в ступенчатой форме. Ранг показывает, сколько независимых строк (или столбцов) содержит матрица, и является важнейшей инвариантной характеристикой.
- **Действия над матрицами.** Мы рассмотрели три основные операции: сложение (покомпонентное, только для матриц одинакового размера), умножение на число (масштабирование всех элементов) и умножение матриц (правило «строка на столбец»). Умножение матриц некоммукативно, но ассоциативно и дистрибутивно. Также освоили возведение квадратных матриц в степень и транспонирование (замену строк столбцами).

И все же, несмотря на мощь матричных операций, мы пока не можем ответить на фундаментальные вопросы: обратима ли данная квадратная матрица? Имеет ли система линейных уравнений единственное решение? Как узнать, что строки (или столбцы) линейно зависимы, не приводя матрицу к ступенчатому виду каждый раз? И наконец, как геометрически интерпретировать действие матрицы на пространство?

Ответ на все эти вопросы даёт **определитель матрицы** (детерминант) — число, которое ставится в соответствие каждой квадратной матрице. Определитель обладает удивительным свойством: он равен нулю тогда и только тогда, когда матрица вырождена (т.е. её строки или столбцы линейно зависимы). Для матриц 2×2 и 3×3 мы уже можем вычислять определитель по правилам треугольника или Саррюса, но в общем случае нужны более мощные методы.

Определитель станет тем мостом, который свяжет алгебру матриц с геометрией и позволит решать многие прикладные задачи. Переходим к его изучению.

1.2 Определители матриц

Что такое определитель и зачем он нужен?

Ответы на перечисленные вопросы даёт **определитель матрицы** (или **детерминант**) — числовая характеристика, которая ставится в соответствие каждой квадратной матрице. Термин «определитель» (англ. *determinant*) подчёркивает ключевую роль этой величины: она **определяет** важные свойства матрицы, в том числе:

- обратимость матрицы (существование обратной);
- линейную зависимость или независимость строк и столбцов;
- масштаб изменения «объёма» при линейном преобразовании (геометрическая интерпретация станет яснее позже, когда мы изучим векторы).

Исторически термин вошёл в математику в XVIII веке и закрепился во всех языках как «определитель» или «детерминант».

Определение 1.17. Любой квадратной матрице A порядка n можно поставить в соответствие по определённому закону некоторое число, называемое **определителем n -го порядка** этой матрицы (или **детерминантом**). Обозначается как $\det(A)$ или $|A|$.

Определитель — это не просто абстрактное число. Его значение напрямую связано с поведением матрицы:

- если $\det(A) = 0$, матрица **вырождена** — у неё нет обратной, а её строки (или столбцы) линейно зависимы;
- если $\det(A) \neq 0$, матрица **невырождена**, обратима, а её строки (столбцы) линейно независимы.

1.2.1 Вычисление определителей квадратных матриц второго и третьего порядков

Чтобы понять общий принцип, начнём с матриц наименьших размеров. Это поможет нам увидеть закономерности, которые затем обобщатся на произвольный порядок.

Определитель первого порядка

Для матрицы первого порядка $A = (a_{11})$ определитель равен самому элементу:

$$\det(A) = |A| = a_{11}.$$

Это тривиальный случай, но он задаёт базовое правило: определитель матрицы 1×1 — это просто её единственный элемент.

Определитель второго порядка

Пусть дана квадратная матрица второго порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы A называется число:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Для запоминания правила вычисления существует удобная мнемоническая схема: определитель второго порядка равен разности произведений элементов **главной диагонали** (берётся со знаком «+») и **побочной диагонали** (со знаком «−»).

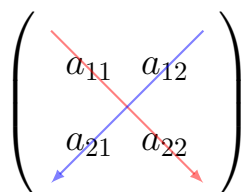


Рисунок 1.9. Схема вычисления определителя 2-го порядка: **главная диагональ** (+) и **побочная диагональ** (−)

Перейдем к определителю третьего порядка.

Определитель третьего порядка

Для матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

существуют два удобных способа вычисления определителя. Рассмотрим каждый из них подробно.

1. Правило треугольника (правило звёздочки)

Формула выглядит следующим образом:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

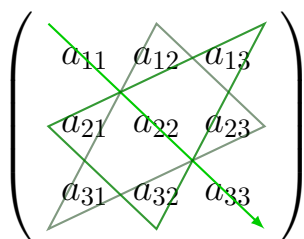
Чтобы легче запомнить это выражение, используют геометрическую интерпретацию. Разобьём все шесть слагаемых на две группы:

- Со знаком «+»:

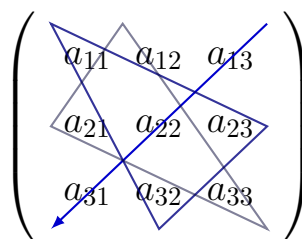
- главная диагональ: $a_{11}a_{22}a_{33}$;
- два «треугольника», идущие параллельно главной диагонали: $a_{12}a_{23}a_{31}$ и $a_{13}a_{21}a_{32}$.

- Со знаком «–»:

- побочная диагональ: $a_{13}a_{22}a_{31}$;
- два «треугольника», идущие параллельно побочной диагонали: $a_{11}a_{23}a_{32}$ и $a_{12}a_{21}a_{33}$.



(a) Элементы со знаком «+»: главная диагональ и два треугольника, идущие параллельно ей



(b) Элементы со знаком «–»: побочная диагональ и два треугольника, идущие параллельно ей

Рисунок 1.10. Схема правила треугольника для определителя 3×3 . Слева — слагаемые со знаком «+», справа — со знаком «–».

2. Правило Саррюса

Этот метод удобен для запоминания и вычислений «вручную». Алгоритм состоит из трёх шагов:

1. Дописываем справа от матрицы первые два столбца (получаем таблицу 3×5).
2. Берём произведения элементов на трёх линиях, параллельных главной диагонали (каждая линия содержит три элемента), и складываем их со знаком «+».
3. Берём произведения элементов на трёх линиях, параллельных побочной диагонали, и складываем их со знаком «–».

В результате получается та же самая формула, что и в правиле треугольника.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(а) Исходная матрица 3×3 . Первые два столбца выделены красной пунктирной рамкой — их нужно скопировать справа.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

(б) Полная матрица 3×5 для правила Саррюса. Все шесть линий с указанием знаков произведений элементов.

Рисунок 1.11. Правило Саррюса для вычисления определителя 3×3 . Слева: выделение первых двух столбцов исходной матрицы и указание на их копирование. Справа: расширенная матрица с линиями для вычисления произведений (зелёные — со знаком «+», оранжевые — со знаком «−»).

Сравнение методов

Оба метода дают одинаковый результат — это просто разные способы запомнить одну и ту же формулу. Какой из них выбрать, зависит от ваших предпочтений:

- **Правило треугольника** лучше подходит для понимания структуры определителя, так как оно явно показывает вклад главной и побочной диагоналей.
- **Правило Саррюса** удобнее для быстрых вычислений «на бумаге», поскольку не требует запоминания расположения треугольников — достаточно механически провести линии.

Важные замечания:

- Правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков являются частными случаями общего определения определителя через перестановки (которое мы изучим позже в курсе).
- Для матриц порядка выше 3 эти правила не работают — там используются другие методы (разложение по строке/столбцу, приведение к треугольному виду).
- Знак определителя может быть положительным, отрицательным или нулевым — это несёт важную информацию о свойствах матрицы.

Пример 1.17

Вычислим определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

по правилу Саррюса. Разберём каждый шаг подробно.

Шаг 1. Дописываем первые два столбца.

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 0 & 5 & 6 \end{array}$$

Шаг 2. Вычисляем слагаемые со знаком «+». Проводим три линии, параллельные главной диагонали:

- первая линия (главная диагональ): $1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$;
- вторая линия (сдвиг на один столбец вправо): $2 \cdot 4 \cdot 5 = 40$;
- третья линия (ещё один сдвиг): $3 \cdot 0 \cdot 6 = 0$.

Сумма положительных слагаемых: $0 + 40 + 0 = 40$.

Шаг 3. Вычисляем слагаемые со знаком «−». Проводим три линии, параллельные побочной диагонали:

- первая линия (побочная диагональ): $3 \cdot 1 \cdot 5 = 15$;
- вторая линия (сдвиг на один столбец влево): $1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$;
- третья линия (ещё один сдвиг): $2 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

Сумма отрицательных слагаемых: $15 + 24 + 0 = 39$.

Шаг 4. Находим определитель.

$$|A| = 40 - 39 = 1.$$

Таким образом, $\det(A) = 1$. Поскольку определитель не равен нулю, матрица A невырождена и обратима. Это означает, что система линейных уравнений с такой матрицей коэффициентов будет иметь единственное решение (при условии совместности).

1.2.2 Свойства определителей

Знание свойств определителей существенно упрощает их вычисление и позволяет глубже понять структуру матриц. Перечислим восемь основных свойств. Для каждого свойства приведём формулировку, пример и краткий комментарий,

объясняющий, почему это свойство работает.

1. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной:

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Это свойство означает, что строки и столбцы в определителе равноправны. Любое утверждение, верное для строк, автоматически верно и для столбцов, и наоборот. Поэтому при вычислении определителя мы всегда можем выбрать наиболее удобную строку или столбец.

Пример 1.18

Для $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ имеем $\det(A) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5$. Транспонируем: $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда $\det(A^T) = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5$. Результаты совпадают.

2. При перестановке двух строк (или двух столбцов) определитель меняет знак. Это свойство часто используется при приведении матрицы к треугольному виду. Если в процессе преобразований нам потребовалось поменять строки местами, мы должны не забыть изменить знак определителя.

Пример 1.19

Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$. Поменяем строки местами: $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 6 - 4 = 2 = -(-2)$. Знак действительно изменился на противоположный.

3. Если две строки (или два столбца) матрицы одинаковы, то определитель равен нулю. Это следствие предыдущего свойства: при перестановке двух одинаковых строк матрица не изменяется, поэтому её определитель должен равняться самому себе со знаком минус. Единственное число, обладающее таким свойством, — это ноль.

Пример 1.20

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0. \text{ Действительно, строки одинаковы, и определитель нулевой.}$$

4. **Общий множитель всех элементов одной строки (или одного столбца) можно вынести за знак определителя.** Это свойство позволяет упрощать вычисления, сокращая большие числа или дробные коэффициенты.

Пример 1.21

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2. \text{ Вынесем 2 из первой строки:}$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot 5 - 2 \cdot 3) = 2 \cdot (5 - 6) = 2 \cdot (-1) = -2. \text{ Результат не изменился.}$$

5. **Если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число, определитель не изменится.** Это самое мощное свойство для практических вычислений. Именно на нём основан метод приведения к треугольному виду.

Пример 1.22

$$\text{Возьмём определитель } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2. \text{ Прибавим к первой строке вторую, умноженную на 1:}$$

$$\begin{vmatrix} 1+3 & 2+4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 16 - 18 = -2. \text{ Значение не изменилось.}$$

6. **Если строка (столбец) состоит из нулей, то определитель равен нулю.** Это свойство очевидно следует из определения: каждое слагаемое в формуле содержит множитель из этой строки, а значит, равно нулю.

Пример 1.23

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 0.$$

7. **Определитель треугольной (в частности, диагональной) матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.** Это свойство позволяет мгновенно находить определитель после приведения матрицы к треугольному виду.

Пример 1.24

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 5 = -10$. Все элементы ниже главной диагонали — нули, поэтому определитель — просто произведение диагональных элементов.

8. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Это свойство является ключевым для многих теоретических выкладок, например, для доказательства того, что обратимая матрица имеет ненулевой определитель.

Пример 1.25

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$, $\det(B) = 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 6$. Произведение $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$. $\det(AB) = 4 \cdot 12 - 6 \cdot 10 = 48 - 60 = -12 = (-2) \cdot 6$. Свойство подтверждается.

1.2.3 Разложение определителя по строке или столбцу

Для определителей порядка выше 3 правила треугольника и Саррюса не работают. На помощь приходит универсальный метод — **разложение по строке (столбцу)**. Идея заключается в том, чтобы выразить определитель n -го порядка через определители $(n - 1)$ -го порядка. Для этого вводятся вспомогательные понятия: **минор** и **алгебраическое дополнение**. Рассмотрим их подробно.

1.2.3.1 Минор элемента

Определение 1.18. Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A порядка n называется определитель матрицы порядка $n - 1$, полученной из A вычёркиванием i -й строки и j -го столбца.

Название «минор» происходит от латинского *minor* — «меньший», что отражает понижение порядка на единицу. Минор полезен тем, что он «запоминает» структуру исходной матрицы, исключая влияние i -й строки и j -го столбца. Иными словами, он показывает, как ведёт себя остальная часть матрицы, если «зафиксировать» выбранный элемент.

Пример 1.26

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

. Чтобы найти минор элемента a_{12} (первая строка, второй столбец), вычеркнем первую строку и второй столбец:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогично, минор элемента a_{23} (вторая строка, третий столбец) получается вычёркиванием второй строки и третьего столбца:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

1.2.3.2 Алгебраическое дополнение

Определение 1.19. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Знак $(-1)^{i+j}$ называется **знаком места**. Он чередуется в шахматном порядке: в позиции $(1, 1)$ знак $+$, $(1, 2)$ — $-$ и т.д. Это правило можно запомнить так: на пересечении строки и столбца с одинаковой чётностью (оба номера чётные или оба нечётные) знак положительный, если чётность разная — знак отрицательный.

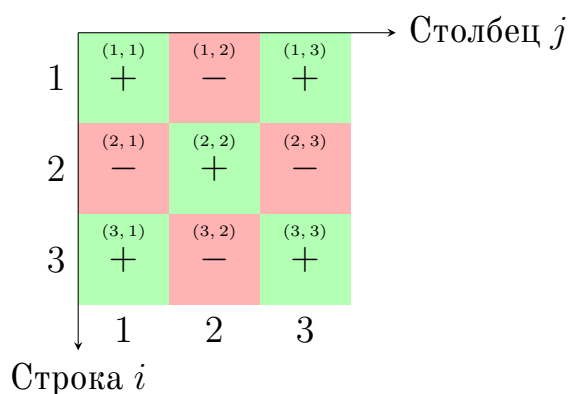


Рисунок 1.12. Шахматный порядок знаков $(-1)^{i+j}$

На иллюстрации справа наглядно видно, как знаки чередуются: зелёные ячейки соответствуют знаку «+» (чётная сумма $i+j$), красные — знаку «−» (нечётная сумма). Такая визуализация помогает быстро определить знак для любой позиции матрицы без вычислений.

Пример 1.27

Вычислим алгебраические дополнения для элементов матрицы из предыдущего примера по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где i — номер строки, j — номер столбца, M_{ij} — минор элемента.

1. Для элемента a_{12} ($i = 1, j = 2$):

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -M_{12}.$$

Знак «минус» появляется из-за нечётной суммы индексов ($1 + 2 = 3$).

2. Для элемента a_{22} ($i = 2, j = 2$):

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 M_{22} = M_{22}.$$

Знак «плюс» получается из-за чётной суммы индексов ($2 + 2 = 4$).

Алгебраические дополнения позволяют записать определитель в виде взвешенной суммы элементов строки (или столбца). Это и есть разложение.

1.2.3.3 Формула разложения

Перед тем как сформулировать точный математический результат, разберём суть метода разложения определителя. На практике вычисление определителя высокого порядка напрямую по определению (через перестановки) становится крайне трудоёмким: для матрицы n -го порядка нужно вычислить $n!$ слагаемых. Например, для матрицы 5×5 это уже 120 слагаемых — что неудобно даже для компьютера.

Метод разложения определителя по строке или столбцу предлагает более эффективный подход: он позволяет свести вычисление одного большого определителя к сумме нескольких меньших определителей. Это рекурсивный процесс: определитель порядка n выражается через определители порядка $(n - 1)$, каждый из которых, в свою очередь, можно разложить дальше.

Теорема 1.2. Определитель квадратной матрицы A порядка n равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \text{для любого фиксированного } i.$$

Аналогично, разложение по столбцу:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \text{для любого фиксированного } j.$$

■

Этот метод сводит вычисление определителя n -го порядка к вычислению n определителей $(n - 1)$ -го порядка. На практике разложение удобно проводить по строке (столбцу), содержащей наибольшее количество нулей — это уменьшает число слагаемых, так как слагаемые с нулевыми коэффициентами можно не учитывать.

Пример 1.28

Вычислим определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ разложением по первой строке.

Шаг 1. Записываем элементы первой строки: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 0$.

Шаг 2. Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 \cdot 6 - 4 \cdot 0) = 18,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 6 - 4 \cdot 5) = -(-20) = 20,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 \cdot 0 - 3 \cdot 5) = -15.$$

Шаг 3. Подставляем в формулу разложения:

$$\det(A) = 2 \cdot 18 + 1 \cdot 20 + 0 \cdot (-15) = 36 + 20 = 56.$$

Для проверки разложим определитель по второму столбцу (содержит 1, 3,

0):

$$A_{12} = 20 \quad (\text{уже найдено}),$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 6 - 0 \cdot 5) = 12,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - 0 \cdot 0) = -8.$$

Сумма по второму столбцу: $1 \cdot 20 + 3 \cdot 12 + 0 \cdot (-8) = 20 + 36 = 56$. Результат совпадает, что подтверждает правильность вычислений.

1.2.4 Теорема Лапласа

Теорема Лапласа обобщает разложение по строке на случай разложения по нескольким строкам (столбцам). Однако наиболее часто используется частный случай — разложение по одной строке, который мы уже рассмотрели. Тем не менее приведём общую формулировку для полноты картины.

Теорема 1.3. Пусть в матрице A порядка n выбраны k строк (столбцов). Тогда определитель A равен сумме произведений всех миноров k -го порядка, расположенных в этих строках, на их алгебраические дополнения (миноры дополняющих строк и столбцов со знаком). ■

На практике для вычислений эта теорема применяется редко (кроме случая $k = 1$), но она лежит в основе многих теоретических построений, например, при доказательстве формулы для обратной матрицы. Для нас важно, что разложение по одной строке — это её частный случай при $k = 1$.

1.2.5 Приведение определителя к треугольному виду

Ещё один эффективный метод вычисления определителей основан на использовании элементарных преобразований, которые мы изучили ранее. С помощью преобразований (прибавление к одной строке другой, умноженной на число) можно привести матрицу к треугольному виду, не меняя определитель (или меняя его предсказуемым образом). Напомним, что определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов. Это свойство делает метод очень удобным.

Теорема 1.4. Используя элементарные преобразования строк, не изменяющие определитель (прибавление к строке другой строки, умноженной на число), можно привести квадратную матрицу к верхнетреугольному виду. Если в процессе потребовалась перестановка строк, определитель меняет знак при каждой перестановке. Если строка умножалась на число, определитель также умножается на это число. ■

Покажем этот метод на подробном примере.

Пример 1.29

Вычислим определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$ методом приведения к треугольному виду. Будем следить за каждым преобразованием.

Шаг 1. Обнулим элементы первого столбца ниже ведущего элемента $a_{11} = 1$. Для этого выполним:

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, \quad R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1.$$

Эти преобразования не меняют определитель (свойство 5). Получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Теперь обнулим элемент второго столбца ниже ведущего $a_{22} = 1$. Выполним $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$. Это преобразование также не меняет определитель. Результат:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица приведена к верхнетреугольному виду (все элементы ниже главной диагонали равны нулю). Её определитель равен произведению диагональных элементов:

$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Проверка. Вычислим тот же определитель по правилу Саррюса для контроля:

$$1 \cdot 5 \cdot 11 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 7 \cdot 7 - 2 \cdot 2 \cdot 11 = 55 + 42 + 42 - 45 - 49 - 44 = 1.$$

Результаты совпадают, что подтверждает правильность метода.

Метод приведения к треугольному виду особенно удобен для матриц больших размеров, так как требует существенно меньше арифметических операций, чем разложение по строке (хотя оба метода имеют одинаковую сложность, на практике приведение к треугольному виду обычно выполняется быстрее и с меньшей вероятностью ошибки).

Теперь, когда мы изучили различные способы вычисления определителей и их свойства, давайте рассмотрим сквозной пример, который свяжет все эти методы воедино. В качестве объекта возьмём уже знакомую нам технологическую матрицу C из предыдущего экономического примера:

Пример 1.30

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что эта матрица описывает межотраслевые потоки: элемент c_{ij} — сколько продукции отрасли i нужно для производства единицы продукции отрасли j . Для того чтобы модель Леонтьева имела единственное решение (т.е. для любого конечного спроса существовал единственный план выпуска), матрица C должна быть невырожденной. Иными словами, её определитель должен быть отличен от нуля. Вычислим $\det(C)$ тремя разными способами и убедимся в этом.

Способ 1: правило Саррюса (для матриц 3×3).

Дописываем справа от матрицы первые два столбца:

$$\begin{array}{ccc|cc} 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{array}$$

Вычисляем сумму произведений по трём диагоналям, параллельным главной (со знаком «+»):

$$0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.001,$$

$$0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.1 = 0.012,$$

$$0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.008.$$

Сумма положительных слагаемых: $0.001 + 0.012 + 0.008 = 0.021$.

Теперь сумма произведений по трём диагоналям, параллельным побочной (со знаком «-»):

$$0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.1 = 0.002,$$

$$0.1 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.008,$$

$$0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.1 = 0.006.$$

Сумма отрицательных слагаемых: $0.002 + 0.008 + 0.006 = 0.016$.

Окончательно:

$$\det(C) = 0.021 - 0.016 = 0.005.$$

Способ 2: разложение по первой строке.

Выбираем первую строку: $c_{11} = 0.1$, $c_{12} = 0.3$, $c_{13} = 0.2$. Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0.1 \cdot 0.1 - 0.4 \cdot 0.2) = 0.01 - 0.08 = -0.07,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 \end{vmatrix} = -(0.2 \cdot 0.1 - 0.4 \cdot 0.1) = -(0.02 - 0.04) = 0.02,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0.2 \cdot 0.2 - 0.1 \cdot 0.1) = 0.04 - 0.01 = 0.03.$$

Тогда

$$\det(C) = 0.1 \cdot (-0.07) + 0.3 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.03 = -0.007 + 0.006 + 0.006 = 0.005.$$

Способ 3: приведение к треугольному виду.

Чтобы избежать десятичных дробей, умножим все строки на 10 (это преобразование умножает определитель на $10^3 = 1000$). Получим матрицу

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(C') = 10^3 \det(C).$$

Теперь приведём C' к верхнетреугольному виду с помощью элементарных преобразований, не меняющих определитель (кроме перестановок, которых мы избежим).

Выполним $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$, $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь $R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{5}R_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица стала верхнетреугольной. Её определитель равен произведению диагональных элементов:

$$\det(C') = 1 \cdot (-5) \cdot (-1) = 5.$$

Вспоминая, что $\det(C') = 1000 \det(C)$, получаем

$$\det(C) = \frac{5}{1000} = 0.005.$$

Все три способа дали одинаковый результат — $\det(C) = 0.005 \neq 0$.

Что означает этот результат для экономики?

Ненулевой определитель технологической матрицы C говорит о том, что матрица $(E - C)$ также невырождена (поскольку $\det(E - C) = \det(E - C) \neq 0$ — точное значение можно вычислить, но это не принципиально). Следовательно, система уравнений межотраслевого баланса $(E - C)X = Y$ имеет единственное решение для любого вектора конечного спроса Y . Это означает, что экономика, описываемая такой матрицей, является продуктивной: можно однозначно определить объёмы выпуска X , необходимые для удовлетворения заданного конечного спроса.

Более того, $\det(C) = 0.005$ — это число небольшое, но ненулевое. Если бы определитель оказался нулевым, это означало бы, что строки матрицы линейно зависимы, и одна из отраслей не добавляет новой информации — такая

экономика была бы вырожденной и не имела бы устойчивого решения. Таким образом, вычисление определителя даёт быстрый и надёжный критерий «качества» экономической модели.

Проверка свойств определителей на примере.

В ходе вычислений мы неявно использовали несколько свойств:

- при умножении строки на число (умножение всей матрицы на 10) определитель умножается на 10^3 ;
- прибавление к строке другой строки, умноженной на число, не меняет определитель;
- определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Убедитесь, что каждое преобразование соответствует одному из восьми свойств, изученных ранее.

Вывод.

Мы на практике убедились, что:

- три разных метода вычисления определителя дают один и тот же результат;
- ненулевой определитель гарантирует невырожденность матрицы;
- для экономической модели это означает существование единственного решения и её продуктивность.

Таким образом, определитель выступает не просто абстрактной числовой характеристикой, а мощным инструментом анализа реальных систем. В следующем разделе мы увидим, как определители позволяют находить обратную матрицу, что открывает путь к эффективному решению систем линейных уравнений.

Связь с обратной матрицей и итоги раздела

Итак, мы научились вычислять определители квадратных матриц разными способами:

- по формулам для 2×2 и 3×3 (правило треугольника или Саррюса);
- с помощью разложения по строке (столбцу) — универсальный метод для любого порядка;
- методом приведения к треугольному виду — наиболее эффективный для ручных вычислений.

Кроме того, мы изучили восемь основных свойств определителей, которые позволяют упрощать вычисления и доказывать теоремы. Эти свойства также дают нам инструмент для ответа на вопросы, поставленные в начале раздела.

Теперь мы можем чётко сформулировать:

- Матрица обратима тогда и только тогда, когда её определитель отличен от нуля. (Если $\det(A) = 0$, то матрица вырождена и обратной не существует.)
- Система линейных уравнений с квадратной матрицей A и правой частью b имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$ (при условии совместности системы).
- Строки (столбцы) матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю.

В следующем разделе мы введём понятие **обратной матрицы** — матрицы A^{-1} , такой что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Оказывается, обратная матрица существует только для невырожденных матриц (т.е. с $\det(A) \neq 0$). Более того, элементы обратной матрицы могут быть выражены через алгебраические дополнения с помощью формулы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (C_{ji}), \quad \text{где } C_{ji} = A_{ij} \text{ — алгебраическое дополнение.}$$

Эта формула называется **формулой для обратной матрицы через присоединённую** (или союзную) матрицу. Мы подробно разберём её вывод и научимся находить обратные матрицы для матриц второго и третьего порядков. Кроме того, метод обратной матрицы позволит нам эффективно решать системы линейных уравнений, что является одной из главных задач линейной алгебры. Переходим к следующему параграфу.

1.3 Обратная матрица

После того как мы освоили понятие определителя и научились его вычислять, естественным образом возникает вопрос: можно ли для матрицы определить аналог обратного числа? В обычной арифметике для каждого ненулевого числа a существует обратное a^{-1} , такое что $a \cdot a^{-1} = 1$. Для матриц тоже существует подобное понятие, но оно имеет свои особенности. Давайте разберёмся, что такое обратная матрица, когда она существует и как её находить.

Важность обратной матрицы трудно переоценить: она играет ключевую роль при решении систем линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ (решение выражается как $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$), в преобразованиях координат, компьютерной графике и многих других областях математики и её приложений.

1.3.1 Определение обратной матрицы

Определение 1.20. Квадратная матрица A порядка n называется **обратимой** (или **невырожденной**), если существует такая квадратная матрица B того же порядка, что

$$AB = BA = E,$$

где E — единичная матрица порядка n . Матрица B называется **обратной** к A и обозначается A^{-1} .

Иными словами, обратная матрица «нейтрализует» действие исходной при умножении — подобно тому, как умножение на a^{-1} отменяет умножение на a . Однако, в отличие от чисел, не всякая квадратная матрица имеет обратную. Прежде чем переходить к методам нахождения, установим несколько важных свойств, которые помогут нам понять структуру обратимых матриц.

1.3.2 Лемма о порядке обратной матрицы

Начнём с самого очевидного, но важного утверждения: если обратная матрица существует, то исходная матрица обязательно квадратная.

Лемма 1.1. Если для матрицы A существует обратная матрица A^{-1} , то обе матрицы являются квадратными и имеют одинаковый порядок. ■

Доказательство. Предположим, что A — матрица размера $m \times n$, а A^{-1} — матрица размера $p \times q$. По определению, произведение AA^{-1} должно быть определено, поэтому число столбцов A (равное n) должно совпадать с числом строк A^{-1} (равным p). Аналогично, произведение $A^{-1}A$ также определено, откуда число столбцов A^{-1} (равное q) должно равняться числу строк A (равному m). Таким образом, $n = p$ и $q = m$.

Результат AA^{-1} имеет размер $m \times q$, а $A^{-1}A$ — размер $p \times n$. Поскольку оба произведения равны единичной матрице, они должны быть квадратными. Следовательно, $m = q$ и $p = n$. Из полученных равенств выводим: $m = q = m$ (тривиально), $n = p = n$, и также $m = n$ (поскольку $p = n$ и $p = m$). Итак, $m = n$, то есть A — квадратная. Тогда и A^{-1} — квадратная того же порядка. □

Таким образом, обратная матрица существует только для квадратных матриц, и мы в дальнейшем будем рассматривать именно этот случай.

1.3.3 Лемма о единственности обратной матрицы

Следующее свойство говорит о том, что если обратная матрица существует, то она определена однозначно — не может быть двух разных обратных матриц для одной и той же A .

Лемма 1.2. Если обратная матрица для A существует, то она единственна. ■

Доказательство. Предположим, что существуют две матрицы B и C , удовлетворяющие определению: $AB = BA = E$ и $AC = CA = E$. Рассмотрим произведение $B(AC)$. С одной стороны, в силу ассоциативности умножения матриц:

$$B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

С другой стороны, $B(AC) = B(CA) = (BC)A$ — но это не даёт прямого сравнения. Лучше поступить иначе: умножим равенство $AB = E$ слева на C :

$$C(AB) = CE = C.$$

Но $C(AB) = (CA)B = EB = B$. Следовательно, $B = C$. Обратная матрица единственна. □

Это важный результат: если обратная существует, она определена однозначно, и мы можем говорить об *обратной матрице* в единственном числе.

1.3.4 Лемма об определителе обратимой матрицы

Теперь свяжем обратимость с определителем. Это ключевое свойство, которое даёт нам простой критерий.

Лемма 1.3. Если матрица A имеет обратную A^{-1} , то $\det(A) \neq 0$. Более того,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

■

Доказательство. По определению, $AA^{-1} = E$. Возьмём определитель от обеих частей. Используя свойство определителя произведения: $\det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$. С другой стороны, $\det(E) = 1$. Получаем:

$$\det(A) \det(A^{-1}) = 1.$$

Произведение двух чисел равно единице, поэтому ни один из множителей не может быть нулём. Следовательно, $\det(A) \neq 0$ и $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$. $\square$

Это свойство даёт нам необходимый критерий обратимости: если $\det(A) = 0$, то обратной матрицы не существует. Такие матрицы называют **вырожденными**.

1.3.5 Вырожденные (особенные) матрицы

Определение 1.21. Квадратная матрица A , определитель которой равен нулю ($\det(A) = 0$), называется **вырожденной** (или **особенной**). Для вырожденной матрицы обратная не существует.

Вырожденные матрицы возникают, например, когда строки (или столбцы) линейно зависимы. В геометрической интерпретации они «схлопывают» пространство, уменьшая размерность образа. Поэтому с практической точки зрения мы всегда стремимся работать с невырожденными матрицами.

1.3.6 Нахождение обратной матрицы

Существует два основных способа вычисления обратной матрицы: через алгебраические дополнения (аналитический) и методом элементарных преобразований (алгоритмический). Рассмотрим оба способа подробно, с примерами и пояснениями.

1.3.6.1 Первый способ: через алгебраические дополнения

Этот метод основан на использовании определителя и матрицы, составленной из алгебраических дополнений. Он удобен для матриц второго и третьего порядков, но для больших размеров становится громоздким.

Определение 1.22. Пусть $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n , и A_{ij} — алгебраические дополнения её элементов (напомним, что $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} — минор). Матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **присоединённой** (или **союзной**) матрицей к A .

Обратите внимание: в присоединённой матрице на месте (i, j) стоит алгебраическое дополнение элемента a_{ij} , а не a_{ji} . Это важно для последующего транспонирования.

Теорема 1.5. Если $\det(A) \neq 0$, то обратная матрица существует и вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}^T,$$

где $\tilde{A}^T$ — транспонированная присоединённая матрица (иногда её называют *союзной* в другом порядке). ■

Иными словами, элементы обратной матрицы находятся как

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det(A)} A_{ji}.$$

Идея доказательства. Рассмотрим произведение $A \cdot \tilde{A}^T$. Его элемент на позиции (i, j) равен

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} (\tilde{A}^T)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk}.$$

Если $i = j$, то это сумма произведений элементов i -й строки на их алгебраические дополнения — по теореме разложения определителя она равна $\det(A)$. Если $i \neq j$, то это сумма произведений элементов одной строки на алгебраические дополнения другой строки — такая сумма равна нулю (свойство «ложного» разложения). Следовательно,

$$A \cdot \tilde{A}^T = \det(A) \cdot E.$$

Аналогично доказывается, что $\tilde{A}^T \cdot A = \det(A) \cdot E$. Отсюда

$$\frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T \cdot A = E,$$

и по определению эта матрица является обратной к A . $\square$

Пример 1.31

Найдём обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Шаг 1. Вычисляем определитель: $\det(A) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5 \neq 0$, матрица обратима.

Шаг 2. Находим алгебраические дополнения (для матрицы 2×2 это просто):

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1, \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3, & A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

Шаг 3. Составляем присоединённую матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Транспонируем её:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 5. Делим на определитель:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ AA^{-1} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) & 1 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = E \end{aligned}$$

Для матриц порядка выше 3 этот метод становится громоздким, так как требует вычисления многих определителей. Поэтому на практике чаще используют второй способ.

1.3.6.2 Второй способ: метод Гаусса–Жордана (элементарные преобразования)

Этот метод является наиболее универсальным и эффективным для ручных вычислений, особенно для матриц порядка 3 и выше. Он основан на применении элементарных преобразований строк к расширенной матрице $(A|E)$.

Теорема 1.6. Пусть A — невырожденная квадратная матрица. Составим расширенную матрицу $(A|E)$, приписав справа единичную матрицу того же порядка. Если с помощью элементарных преобразований строк (не меняющих ранг) привести левый блок к единичной матрице, то правый блок станет обратной матрицей A^{-1} . ■

Обоснование. Каждое элементарное преобразование строк соответствует умножению на некоторую невырожденную матрицу слева. Если мы применим последовательность таких матриц $P_1, P_2, \dots, P_k$, то в результате получим

$$P_k \cdots P_1 \cdot (A|E) = (P_k \cdots P_1 A \mid P_k \cdots P_1 E) = (E \mid P_k \cdots P_1).$$

Поскольку $P_k \cdots P_1 A = E$, то $P_k \cdots P_1 = A^{-1}$, что и стоит в правом блоке. □

Алгоритм действий:

1. Записываем расширенную матрицу $(A|E)$.
2. С помощью элементарных преобразований строк (перестановка, умножение строки на ненулевое число, прибавление к одной строке другой, умноженной на число) добиваемся, чтобы левая часть стала единичной матрицей.
3. Если в процессе возникла нулевая строка в левой части — матрица вырождена, обратной не существует.
4. После того как левая часть превратилась в E , правая часть даёт A^{-1} .

Пример 1.32

Найдём обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ методом Гаусса–Жордана.

Шаг 1. Составляем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Шаг 2. Поменяем строки местами, чтобы получить ведущую единицу в

левом верхнем углу: $R_1 \leftrightarrow R_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Шаг 3. Обнулим элемент под ведущим: $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right).$$

Шаг 4. Сделаем ведущий элемент во второй строке равным 1: умножим R_2 на -1 :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Шаг 5. Обнулим элемент над ведущим во втором столбце: $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Левая часть стала единичной матрицей, следовательно, правая часть — искомая обратная:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Этот метод также позволяет сразу определить, является ли матрица вырожденной: если в процессе преобразований в левой части появляется нулевая строка, то $\det(A) = 0$ и обратной матрицы не существует.

Теперь, когда мы изучили теорию и методы вычисления обратной матрицы, рассмотрим, как эти знания применяются в реальной экономической задаче. Вернёмся к модели межотраслевого баланса, с которой мы работали в разделе «Матрицы». Напомним, что у нас была технологическая матрица C (коэффициенты прямых затрат) и данные о выпуске за два квартала. Теперь, используя аппарат обратных матриц, решим **обратную задачу**: каким должен быть валовой выпуск каждой отрасли, чтобы обеспечить заданный конечный спрос?

Пример 1.33

Исходные данные. Технологическая матрица (та же, что и ранее):

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что элемент c_{ij} показывает, сколько продукции отрасли i требуется для производства единицы продукции отрасли j .

Предположим, что в следующем квартале правительство планирует конечный спрос (продукцию, идущую на потребление, экспорт, накопление) в размере

$$Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix} \text{ млрд руб.}$$

Здесь первая компонента — спрос на продукцию сельского хозяйства, вторая — промышленности, третья — услуг. Требуется найти вектор валового выпуска $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, который обеспечит этот конечный спрос.

Математическая модель. В модели Леонтьева связь между валовым выпуском X и конечным продуктом Y задаётся уравнением

$$X - CX = Y \quad \Leftrightarrow \quad (E - C)X = Y,$$

где E — единичная матрица. Если матрица $(E - C)$ невырождена, то решение можно записать как

$$X = (E - C)^{-1}Y.$$

Таким образом, нам нужно:

1. Вычислить матрицу $A = E - C$ и убедиться, что $\det(A) \neq 0$.
2. Найти обратную матрицу A^{-1} .
3. Умножить A^{-1} на вектор Y и получить искомый выпуск X .

Шаг 1. Составление матрицы $A = E - C$.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = E - C = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.9 & -0.4 \\ -0.1 & -0.2 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Проверка невырожденности. Вычислим определитель A . Для наглядности разложим определитель по первой строке:

$$\det(A) = 0.9 \cdot \begin{vmatrix} 0.9 & -0.4 \\ -0.2 & 0.9 \end{vmatrix} - (-0.3) \cdot \begin{vmatrix} -0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.9 \end{vmatrix} + (-0.2) \cdot \begin{vmatrix} -0.2 & 0.9 \\ -0.1 & -0.2 \end{vmatrix}.$$

Вычислим каждый минор:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0.9 & -0.4 \\ -0.2 & 0.9 \end{vmatrix} &= 0.9 \cdot 0.9 - (-0.4) \cdot (-0.2) = 0.81 - 0.08 = 0.73, \\ \begin{vmatrix} -0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.9 \end{vmatrix} &= (-0.2) \cdot 0.9 - (-0.4) \cdot (-0.1) = -0.18 - 0.04 = -0.22, \\ \begin{vmatrix} -0.2 & 0.9 \\ -0.1 & -0.2 \end{vmatrix} &= (-0.2) \cdot (-0.2) - 0.9 \cdot (-0.1) = 0.04 + 0.09 = 0.13. \end{aligned}$$

Подставляем:

$$\det(A) = 0.9 \cdot 0.73 - (-0.3) \cdot (-0.22) + (-0.2) \cdot 0.13$$

$$\det(A) = 0.657 - 0.066 - 0.026 = 0.565.$$

Поскольку $\det(A) = 0.565 \neq 0$, матрица A невырождена, обратная существует. Это означает, что для любого вектора конечного спроса существует единственный вектор валового выпуска.

Шаг 3. Вычисление обратной матрицы A^{-1} методом алгебраических дополнений. Найдём алгебраические дополнения для всех элементов A . Для каждого элемента a_{ij} вычислим $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} — определитель матрицы, полученной вычёркиванием i -й строки и j -го столбца.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0.9 & -0.4 \\ -0.2 & 0.9 \end{vmatrix} = 0.73, \\
A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -0.2 & -0.4 \\ -0.1 & 0.9 \end{vmatrix} = -(-0.22) = 0.22, \\
A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -0.2 & 0.9 \\ -0.1 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.13, \\
A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.9 \end{vmatrix} = -((-0.3) \cdot 0.9 - (-0.2) \cdot (-0.2)) = 0.31, \\
A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.1 & 0.9 \end{vmatrix} = 0.9 \cdot 0.9 - (-0.2) \cdot (-0.1) = 0.79, \\
A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 \\ -0.1 & -0.2 \end{vmatrix} = -(0.9 \cdot (-0.2) - (-0.3) \cdot (-0.1)) = 0.21, \\
A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -0.3 & -0.2 \\ 0.9 & -0.4 \end{vmatrix} = (-0.3) \cdot (-0.4) - (-0.2) \cdot 0.9 = 0.30, \\
A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0.9 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 \end{vmatrix} = -(0.9 \cdot (-0.4) - (-0.2) \cdot (-0.2)) = 0.40, \\
A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 \\ -0.2 & 0.9 \end{vmatrix} = 0.9 \cdot 0.9 - (-0.3) \cdot (-0.2) = 0.75.
\end{aligned}$$

Составим присоединённую матрицу $\tilde{A}$ (из алгебраических дополнений):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0.73 & 0.22 & 0.13 \\ 0.31 & 0.79 & 0.21 \\ 0.30 & 0.40 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем её (получаем союзную матрицу):

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 0.73 & 0.31 & 0.30 \\ 0.22 & 0.79 & 0.40 \\ 0.13 & 0.21 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

Теперь обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}^T = \frac{1}{0.565} \begin{pmatrix} 0.73 & 0.31 & 0.30 \\ 0.22 & 0.79 & 0.40 \\ 0.13 & 0.21 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

Вычислим приближённые значения (для удобства дальнейших расчётов):

$$A^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.292 & 0.549 & 0.531 \\ 0.389 & 1.398 & 0.708 \\ 0.230 & 0.372 & 1.327 \end{pmatrix}.$$

Альтернативный способ: метод Гаусса–Жордана. Для контроля вычислим A^{-1} элементарными преобразованиями. Расширенная матрица $(A|E)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0.9 & -0.3 & -0.2 & 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.9 & -0.4 & 0 & 1 & 0 \\ -0.1 & -0.2 & 0.9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Умножим каждую строку на 10, чтобы избавиться от десятичных дробей:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & -3 & -2 & 10 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & -4 & 0 & 10 & 0 \\ -1 & -2 & 9 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right).$$

Далее выполняем преобразования (для краткости опустим промежуточные выкладки, они приводят к тому же результату). В итоге получим:

$$A^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.292 & 0.549 & 0.531 \\ 0.389 & 1.398 & 0.708 \\ 0.230 & 0.372 & 1.327 \end{pmatrix}.$$

Как видим, результат совпадает с полученным ранее, что подтверждает правильность вычислений.

Шаг 4. Расчёт валового выпуска. Теперь умножим A^{-1} на вектор конечного спроса $Y = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}$:

$$X = A^{-1}Y = \frac{1}{0.565} \begin{pmatrix} 0.73 & 0.31 & 0.30 \\ 0.22 & 0.79 & 0.40 \\ 0.13 & 0.21 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Сначала вычислим компоненты вектора-произведения без деления на 0.565:

$$\begin{pmatrix} 0.73 \cdot 50 + 0.31 \cdot 100 + 0.30 \cdot 150 \\ 0.22 \cdot 50 + 0.79 \cdot 100 + 0.40 \cdot 150 \\ 0.13 \cdot 50 + 0.21 \cdot 100 + 0.75 \cdot 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36.5 + 31 + 45 \\ 11 + 79 + 60 \\ 6.5 + 21 + 112.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112.5 \\ 150 \\ 140 \end{pmatrix}.$$

Теперь разделим каждую компоненту на $\det(A) = 0.565$:

$$X = \begin{pmatrix} 112.5/0.565 \\ 150/0.565 \\ 140/0.565 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 199.1 \\ 265.5 \\ 247.8 \end{pmatrix} \text{ млрд руб.}$$

Визуализация результатов. На диаграмме ниже показано соотношение между заданным конечным спросом Y и вычисленным валовым выпуском X . Хорошо видно, что валовой выпуск значительно превышает конечный спрос, поскольку большая часть продукции уходит на внутреннее потребление между отраслями.

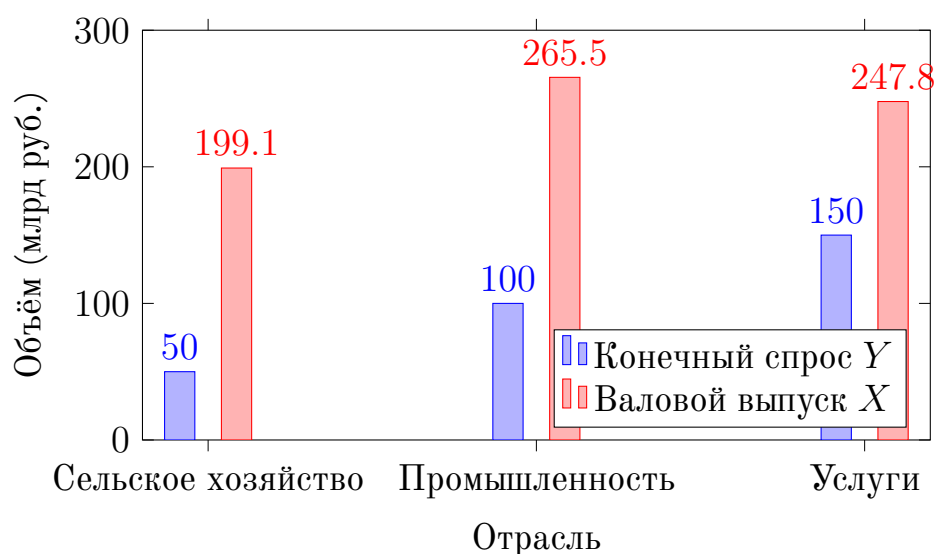


Рисунок 1.13. Сравнение конечного спроса и необходимого валового выпуска по отраслям.

Интерпретация результата. Чтобы обеспечить конечный спрос в размере 50 млрд руб. от сельского хозяйства, 100 млрд руб. от промышленности и 150 млрд руб. от сферы услуг, необходимо произвести:

- сельскохозяйственной продукции — примерно 199.1 млрд руб.;
- промышленной продукции — примерно 265.5 млрд руб.;

- услуг — примерно 247.8 млрд руб.

Обратите внимание: валовой выпуск каждой отрасли превышает конечный спрос. Это объясняется тем, что значительная часть продукции расходуется внутри самой системы — например, сельское хозяйство поставляет сырьё для промышленности, промышленность — оборудование для сельского хозяйства и т.д. Разница между валовым выпуском и конечным спросом — это как раз внутреннее потребление CX .

Проверка результата. Убедимся, что найденный X действительно удовлетворяет уравнению $(E - C)X = Y$. Для этого вычислим AX с округлением:

$$AX \approx \begin{pmatrix} 0.9 \cdot 199.1 - 0.3 \cdot 265.5 - 0.2 \cdot 247.8 \\ -0.2 \cdot 199.1 + 0.9 \cdot 265.5 - 0.4 \cdot 247.8 \\ -0.1 \cdot 199.1 - 0.2 \cdot 265.5 + 0.9 \cdot 247.8 \end{pmatrix}$$

$$AX \approx \begin{pmatrix} 179.2 - 79.65 - 49.56 = 50.0 \\ -39.82 + 238.95 - 99.12 = 100.0 \\ -19.91 - 53.1 + 223.0 = 150.0 \end{pmatrix}.$$

Результат с высокой точностью совпадает с заданным Y , что подтверждает правильность вычислений.

Выводы. Этот пример наглядно демонстрирует, как:

- определитель позволяет проверить, имеет ли задача единственное решение (невыврожденность матрицы);
- обратная матрица, найденная через алгебраические дополнения или методом Гаусса–Жордана, даёт инструмент для быстрого расчёта валового выпуска при изменении конечного спроса;
- матричные методы позволяют решать практические экономические задачи без привлечения сложных систем уравнений.

Таким образом, обратная матрица — это не просто абстрактная конструкция, а мощный вычислительный инструмент, применяемый в планировании, прогнозировании и многих других областях.

Теперь мы знаем, что такое обратная матрица, когда она существует и как её находить двумя способами. Обратная матрица — мощный инструмент, но её главное применение лежит в решении систем линейных уравнений. Действительно, если у нас есть система $Ax = b$ с невырожденной матрицей A , то, умножив обе части слева на A^{-1} , получим $x = A^{-1}b$. Таким образом, решение системы сводится к умножению обратной матрицы на вектор правой части. В следующем разделе мы подробно изучим методы решения систем линейных уравнений, включая мат-

ричный метод, метод Крамера и метод Гаусса, и увидим, как обратная матрица вписывается в общую картину.

1.4 Системы линейных уравнений

После того как мы подробно изучили матрицы, определители и обратную матрицу, настало время обратиться к одному из самых важных приложений этих понятий — решению систем линейных уравнений. Именно для решения таких систем, собственно, и развивалась линейная алгебра на протяжении столетий. В этом разделе мы познакомимся с основными определениями, научимся решать системы тремя различными способами и, что особенно важно, увидим, как матричный аппарат делает процесс решения наглядным и эффективным. Кроме того, мы выясним, как связаны между собой методы Гаусса, правило Крамера и матричный метод, и в каком случае какой из них предпочтительнее.

1.4.1 Основные понятия

Прежде чем переходить к методам решения, необходимо чётко определить, что же такое система линейных уравнений и какими свойствами она обладает. Будем двигаться постепенно — от простейших понятий к более сложным.

1.4.1.1 Линейные операции и линейная комбинация

Для начала вспомним, что в математике операциями сложения и умножения на число мы пользуемся постоянно. Именно эти операции называются **линейными**. Часто возникает необходимость составить выражение вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$, где α_i — известные числа (коэффициенты), а x_i — переменные. Такое выражение принято называть **линейной комбинацией** переменных $x_1, \dots, x_n$ с коэффициентами α_i .

Например, $3x - 2y + z$ — это линейная комбинация переменных x, y, z с коэффициентами 3, -2 и 1 соответственно. Как видим, ничего сложного здесь нет.

1.4.1.2 Линейное уравнение

Теперь, опираясь на понятие линейной комбинации, дадим определение линейного уравнения.

Определение 1.23. Линейным уравнением относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — заданные числа (коэффициенты), а b — свободный член.

Важно отметить, что если свободный член b равен нулю, то такое уравнение называется **однородным**. В противном случае (когда $b \neq 0$) уравнение называют **неоднородным**. Приведём примеры: $2x - 3y = 5$ — это неоднородное линейное уравнение с двумя переменными, а $4x + y - z = 0$ — однородное.

1.4.1.3 Система линейных уравнений

Перейдём теперь к системам. Когда мы имеем несколько линейных уравнений, содержащих одни и те же неизвестные, мы говорим о **системе линейных уравнений**.

Определение 1.24. Системой линейных уравнений (сокращённо СЛУ) называется совокупность нескольких линейных уравнений, в которых фигурируют одни и те же неизвестные. В общем виде система из m уравнений с n неизвестными записывается так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Если все свободные члены b_i равны нулю, система называется **однородной**. В противном случае — **неоднородной**. Однородные системы обладают важным свойством: они всегда имеют хотя бы одно решение, а именно тривиальное, когда все неизвестные равны нулю.

1.4.1.4 Компактный матричный вид

Обратите внимание, что левые части всех уравнений представляют собой линейные комбинации неизвестных. Используя матрицы, можно записать всю систему очень компактно и изящно:

$$A \cdot X = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица A называется **матрицей системы**, X — **вектором неизвестных**, а B — **вектором правых частей**. Такая форма записи чрезвычайно удобна, особенно когда мы будем применять матричные методы решения.

1.4.1.5 Расширенная матрица системы

Для практического решения систем методом Гаусса часто используют так называемую **расширенную матрицу**. Она получается, если к матрице системы A приписать справа столбец свободных членов B :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Вертикальная черта здесь не является математическим знаком, а служит лишь для наглядного отделения коэффициентов от свободных членов.

1.4.1.6 Решение системы. Совместность

Теперь, когда мы знаем, как записывать систему, нужно понять, что значит её решить.

Определение 1.25. Решением системы называется упорядоченный набор чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, который при подстановке в каждое уравнение обращает его в верное числовое равенство.

Система может иметь одно решение, несколько решений, бесконечно много решений или не иметь решений вовсе. В связи с этим вводятся важные понятия.

Определение 1.26. Система называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение. Если же решений нет, систему называют **несовместной**.

Совместная система, в свою очередь, может быть **определённой** (имеет единственное решение) или **неопределённой** (имеет бесконечно много решений). Однородная система, как уже отмечалось, всегда совместна, поскольку тривиальное

решение существует всегда. Однако она может иметь и ненулевые решения, если её определитель равен нулю.

1.4.1.7 Равносильные (эквивалентные) системы

При решении систем мы часто преобразуем их к более простому виду, не меняя при этом множества решений. Такие системы называются **равносильными**.

Определение 1.27. Две системы называются **равносильными** (или **эквивалентными**), если они имеют одно и то же множество решений.

Важно знать, с помощью каких преобразований можно получить равносильную систему. К таким преобразованиям относятся **элементарные преобразования уравнений**:

- перестановка двух уравнений местами;
- умножение обеих частей уравнения на любое ненулевое число;
- прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Эти преобразования не меняют множества решений, поэтому их можно смело применять для упрощения системы.

1.4.2 Методы решения систем линейных уравнений

Теперь, когда мы ввели все необходимые понятия, перейдём к главному — как же находить решения. Рассмотрим три основных метода: метод Гаусса (универсальный, подходит для любых систем), правило Крамера (для квадратных систем с ненулевым определителем) и матричный метод (через обратную матрицу). Каждый из них хорош в своей ситуации, и умение применять все три — важный навык.

1.4.2.1 Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)

Метод Гаусса — это, пожалуй, самый мощный и универсальный способ. Он применим к любым системам (не только к квадратным) и позволяет одновременно определить, совместна система или нет, а в случае совместности — найти все решения.

Идея метода заключается в следующем: с помощью элементарных преобразований строк мы приводим расширенную матрицу системы к **ступенчатому виду** (а затем, при необходимости, к упрощённому ступенчатому). После этого выполняется **обратный ход** — неизвестные выражаются, начиная с последнего уравнения.

Опишем алгоритм подробно (прямой ход):

1. Записываем расширенную матрицу $(A|B)$.
2. Выбираем первый слева столбец, содержащий ненулевой элемент. Перестановкой строк ставим этот элемент на место ведущего (первая строка, этот столбец).
3. С помощью преобразований $R_i \leftarrow R_i - kR_1$ обнуляем все элементы ниже ведущего в этом столбце.
4. Повторяем процедуру для подматрицы, расположенной правее и ниже ведущего элемента, игнорируя уже обработанные строки.
5. Если в процессе преобразований появляется строка, в которой все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то это означает, что система несовместна — решений нет.

После приведения к ступенчатому виду выполняем обратный ход: из последнего ненулевого уравнения выражаем последнюю неизвестную, подставляем её в предыдущее уравнение и так далее.

Пример 1.34

Решим систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x + 5y + z = 4, \\ 3x + 7y + 2z = 5. \end{cases}$$

Шаг 1. Записываем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \end{array} \right).$$

Шаг 2. Ведущий элемент $a_{11} = 1$ уже находится на нужном месте. Обнуляем элементы под ним:

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, \quad R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1.$$

В результате получаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \end{array} \right).$$

Шаг 3. Обнуляем элемент под ведущим во втором столбце: $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right).$$

Шаг 4. Матрица приведена к ступенчатому виду. Теперь выполняем обратный ход: Из третьего уравнения: $2z = -2$, откуда $z = -1$. Подставляем z во второе уравнение: $y + 3(-1) = -2 \Rightarrow y - 3 = -2 \Rightarrow y = 1$. Подставляем y и z в первое уравнение: $x + 2 \cdot 1 - (-1) = 3 \Rightarrow x + 2 + 1 = 3 \Rightarrow x = 0$.

Таким образом, решение системы: $(0, 1, -1)$.

1.4.2.2 Правило Крамера

Правило Крамера применяется только для **квадратных** систем (то есть когда число уравнений равно числу неизвестных) и при условии, что определитель матрицы системы отличен от нуля. Оно даёт явные формулы для каждого неизвестного, что во многих случаях очень удобно — особенно для небольших систем (2×2 или 3×3).

В отличие от метода Гаусса, который требует последовательных преобразований, правило Крамера позволяет сразу записать решение в виде дробей из определителей. Это особенно полезно, когда нужно:

- получить аналитическое выражение для решения;
- решить систему с параметрами;
- быстро найти одну переменную, не вычисляя остальные.

Теорема 1.7. Если $\det(A) \neq 0$, то система $AX = B$ имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

где A_i — матрица, полученная из A заменой i -го столбца на столбец свободных членов B . ■

Пошаговый алгоритм применения правила Крамера:

1. Записать систему в матричной форме $AX = B$, где:
 - A — матрица коэффициентов при неизвестных;
 - X — столбец неизвестных $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$;
 - B — столбец свободных членов.
2. Вычислить определитель матрицы A . Если $\det(A) = 0$, правило Крамера неприменимо.
3. Для каждого неизвестного x_i :
 - сформировать матрицу A_i , заменив i -й столбец матрицы A на столбец B ;
 - вычислить $\det(A_i)$;
 - найти $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$.
4. Проверить решение подстановкой в исходную систему.

Пример 1.35

Решим систему по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

Шаг 1. Вычисляем определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -4 - 3 = -7 \neq 0.$$

Шаг 2. Вычисляем $\det(A_x)$ — для этого заменяем первый столбец на столбец свободных членов $\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$:

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) = -16 + 9 = -7.$$

Шаг 3. Вычисляем $\det(A_y)$ — заменяем второй столбец:

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 8 \cdot 1 = -6 - 8 = -14.$$

Шаг 4. Находим x и y :

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

Итак, решение системы: $(1, 2)$.

1.4.2.3 Матричный метод (с помощью обратной матрицы)

Если система квадратная и её определитель отличен от нуля, то из матричного уравнения $AX = B$ можно выразить $X = A^{-1}B$. Иными словами, решение находится умножением обратной матрицы на столбец правых частей. Этот метод особенно удобен, когда нужно решить несколько систем с одной и той же матрицей A , но разными правыми частями B : достаточно один раз найти A^{-1} и затем каждый раз умножать её на новый столбец.

Пример 1.36

Решим систему матричным методом:

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x + 4y = 7. \end{cases}$$

Шаг 1. Записываем систему в матричном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Находим обратную матрицу A^{-1} . Для матрицы 2×2 существует простая формула:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Умножаем A^{-1} на B :

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 1 \cdot 7 \\ 1.5 \cdot 3 + (-0.5) \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(1, 1)$.

Теперь, чтобы увидеть, как все три метода работают в одной задаче, рассмотрим содержательный пример. Пусть на предприятии выпускается три вида продукции P_1, P_2, P_3 . Известны нормы расхода трёх видов сырья на единицу каждой продукции (в условных единицах) и общее количество имеющегося сырья. Требуется определить, сколько единиц каждого вида продукции можно произвести, чтобы полностью израсходовать всё сырьё.

Пример 1.37 (Выпуск продукции при ограниченных ресурсах)

Постановка задачи. Предположим, что на промышленном предприятии выпускаются три вида продукции: P_1, P_2 и P_3 . Для их производства используются три вида сырья: C_1, C_2 и C_3 . Известны нормы расхода каждого сырья на единицу каждой продукции (в условных единицах), а также общее количество сырья, имеющееся на складе. Требуется определить, сколько единиц каждого вида продукции можно произвести, чтобы полностью израсходовать все запасы сырья. Такая задача типична для планирования производства и является классическим примером применения систем линейных уравнений.

Исходные данные. Нормы расхода сырья и запасы приведены в таблице:

Сырьё	P_1	P_2	P_3	Запас
C_1	1	2	3	14
C_2	2	1	1	10
C_3	1	1	2	9

Здесь, например, на производство одной единицы P_2 требуется 2 единицы C_1 , 1 единица C_2 и 1 единица C_3 .

Математическая модель. Обозначим через x, y, z количество продукции P_1, P_2, P_3 соответственно. Тогда, исходя из норм расхода, получаем систему

линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 & (\text{ограничение по сырью } C_1), \\ 2x + y + z = 10 & (\text{ограничение по сырью } C_2), \\ x + y + 2z = 9 & (\text{ограничение по сырью } C_3). \end{cases}$$

Каждое уравнение описывает, сколько сырья данного вида потребляется при выпуске x , y , z единиц продукции. Правая часть — это доступный запас. Наша цель — найти неотрицательные x , y , z (количество продукции не может быть отрицательным), удовлетворяющие всем трём уравнениям.

Решение методом Гаусса. Метод Гаусса является наиболее универсальным, он позволяет не только найти решение, но и исследовать систему на совместность. Применим его к нашей системе.

Запишем расширенную матрицу системы (коэффициенты вместе со свободными членами):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{array} \right).$$

Прямой ход: обнуляем элементы под ведущим в первом столбце.

$$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1, \quad R_3 \leftarrow R_3 - R_1.$$

Получаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -3 & -5 & -18 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right).$$

Теперь ведущий элемент второй строки находится во втором столбце. Чтобы избежать дробей, умножим вторую строку на -1 (это элементарное преобразование, не меняющее решение):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right).$$

(На самом деле умножение на -1 необязательно, но оно упрощает дальнейшие действия.)

Обнулим элемент под ведущим во втором столбце. Для этого выполним $R_3 \leftarrow 3R_3 + R_2$ (чтобы избавиться от знаменателей):

$$3R_3 = (0, -3, -3, -15), \quad 3R_3 + R_2 = (0, 0, 2, 3).$$

Таким образом, матрица принимает вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 3 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Обратный ход: теперь последовательно находим неизвестные. Из третьего уравнения: $2z = 3 \Rightarrow z = 1.5$. Из второго уравнения: $3y + 5z = 18 \Rightarrow 3y + 5 \cdot 1.5 = 18 \Rightarrow 3y + 7.5 = 18 \Rightarrow 3y = 10.5 \Rightarrow y = 3.5$. Из первого уравнения: $x + 2y + 3z = 14 \Rightarrow x + 2 \cdot 3.5 + 3 \cdot 1.5 = 14 \Rightarrow x + 7 + 4.5 = 14 \Rightarrow x = 2.5$.

Итак, метод Гаусса даёт решение: $x = 2.5$, $y = 3.5$, $z = 1.5$. Интерпретация: чтобы полностью израсходовать все запасы сырья, необходимо произвести 2.5 единицы продукции Π_1 , 3.5 единицы Π_2 и 1.5 единицы Π_3 .

Решение по правилу Крамера. Правило Крамера применимо только к квадратным системам с ненулевым определителем. Оно даёт явные формулы, что удобно для теоретических выкладок, но для больших систем требует много вычислений.

Матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим её определитель. Разложим по первой строке:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (2 - 1) - 2 \cdot (4 - 1) + 3 \cdot (2 - 1) = 1 - 6 + 3 = -2 \neq 0.$$

Определитель отличен от нуля, значит, система имеет единственное решение.

Теперь для каждого неизвестного составим вспомогательный определитель, заменяя соответствующий столбец столбцом свободных членов $B = (14, 10, 9)^T$.

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 10 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложим по первой строке:

$$\det(A_x) = 14 \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) - 2 \cdot (10 \cdot 2 - 1 \cdot 9) + 3 \cdot (10 \cdot 1 - 1 \cdot 9)$$

$$\det(A_x) = 14 \cdot 1 - 2 \cdot (20 - 9) + 3 \cdot (10 - 9) = 14 - 22 + 3 = -5.$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}.$$

Разложение по первой строке:

$$\det(A_y) = 1 \cdot (10 \cdot 2 - 1 \cdot 9) - 14 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + 3 \cdot (2 \cdot 9 - 10 \cdot 1)$$

$$\det(A_y) = 1 \cdot (20 - 9) - 14 \cdot (4 - 1) + 3 \cdot (18 - 10) = 11 - 42 + 24 = -7.$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

Разложение по первой строке:

$$\det(A_z) = 1 \cdot (1 \cdot 9 - 10 \cdot 1) - 2 \cdot (2 \cdot 9 - 10 \cdot 1) + 14 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1)$$

$$\det(A_z) = 1 \cdot (9 - 10) - 2 \cdot (18 - 10) + 14 \cdot (2 - 1) = -1 - 16 + 14 = -3.$$

Теперь по правилу Крамера:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-5}{-2} = 2.5,$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-7}{-2} = 3.5,$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-3}{-2} = 1.5.$$

Результат полностью совпадает с полученным методом Гаусса.

Решение матричным методом. Матричный метод основан на использовании обратной матрицы. Из уравнения $AX = B$ получаем $X = A^{-1}B$. Этот метод особенно удобен, когда нужно решить несколько систем с одной и той же матрицей A , но разными правыми частями.

Найдём обратную матрицу A^{-1} через алгебраические дополнения. У нас уже есть $\det(A) = -2$. Вычислим алгебраические дополнения (подробные выкладки опущены, так как они были подробно разобраны в разделе об обратной матрице):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1.5 & 0.5 & -2.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

Умножим A^{-1} на столбец правых частей $B = (14, 10, 9)^T$:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -0.5 \cdot 14 + 0.5 \cdot 10 + 0.5 \cdot 9 \\ 1.5 \cdot 14 + 0.5 \cdot 10 - 2.5 \cdot 9 \\ -0.5 \cdot 14 - 0.5 \cdot 10 + 1.5 \cdot 9 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -7 + 5 + 4.5 \\ 21 + 5 - 22.5 \\ -7 - 5 + 13.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

И вновь получаем тот же ответ: $x = 2.5, y = 3.5, z = 1.5$.

Выводы. Мы решили одну и ту же производственную задачу тремя различными методами: методом Гаусса, правилом Крамера и матричным методом. Все три метода дали одинаковый результат, что подтверждает их корректность и взаимную согласованность. Каждый метод имеет свои преимущества:

- **Метод Гаусса** универсален и подходит для любых систем (в том числе неквадратных и вырожденных). Он позволяет также исследовать систему на совместность.
- **Правило Крамера** даёт явные формулы для решения, удобные для теоретических выкладок, но требует вычисления определителей, что при большом размере системы становится трудоёмким.
- **Матричный метод** эффективен, когда нужно решить несколько систем с одной и той же матрицей: достаточно один раз найти обратную матрицу и затем умножать её на разные правые части.

Таким образом, выбор метода зависит от конкретной задачи и доступных вычислительных средств.

Теперь, когда мы освоили решение систем, естественным образом возникает вопрос: а что если неизвестных очень много? Как компактно описывать многомерные объекты и их взаимосвязи? Ответ на этот вопрос даёт **векторная алгебра**. В следующем разделе мы введём понятие вектора, научимся выполнять операции с векторами и, что особенно важно, увидим, что системы линейных уравнений можно интерпретировать как поиск комбинации векторов-столбцов, дающей заданный вектор правой части. Такое геометрическое видение откроет новые горизонты в понимании линейной алгебры и подготовит нас к изучению более сложных тем, таких как линейные пространства и линейные операторы.

1.5 Векторная алгебра

После изучения матриц и систем линейных уравнений мы переходим к ещё одному фундаментальному понятию — вектору. Векторы широко используются в физике, геометрии, компьютерной графике и машинном обучении. Они позволяют описывать направленные величины: силу, скорость, ускорение, перемещение. В этом разделе мы познакомимся с геометрической интерпретацией векторов, научимся выполнять с ними операции, введём координаты и рассмотрим важные характеристики: длину, направление, скалярное, векторное и смешанное произведение. Материал будет сопровождаться наглядными рисунками, поскольку векторные понятия легче всего воспринимать визуально.

1.5.1 Основные понятия

Начнём с самого простого вопроса: что же такое вектор?

Определение 1.28. Вектором называется направленный отрезок, то есть отрезок, у которого указано, какой из его концов является началом, а какой — концом. Вектор обозначается либо $\overrightarrow{AB}$ (где A — начало, B — конец), либо жирной строчной латинской буквой $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Геометрически вектор изображается стрелкой. Длина стрелки соответствует модулю (или длине) вектора. Модуль вектора $\mathbf{a}$ обозначается $|\mathbf{a}|$ или $\|\mathbf{a}\|$.

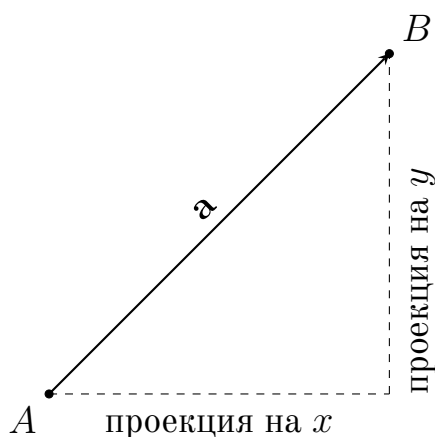


Рисунок 1.14. Вектор $\overrightarrow{AB}$ как направленный отрезок.

Особый случай — **нулевой вектор** $\mathbf{0}$, у которого начало и конец совпадают. Его длина равна нулю, а направление не определено.

Векторы, которые можно параллельно переносить, не меняя их длины и направления, называются **свободными**. В математике и физике чаще всего работают именно со свободными векторами — для них важны только длина и направление, а точка приложения не имеет значения.

1.5.2 Действия с векторами

Теперь перейдём к операциям над векторами. Они во многом похожи на действия с числами, но имеют свою специфику.

1.5.2.1 Сложение векторов

Складывать векторы можно несколькими способами. Рассмотрим основные правила.

Правило треугольника.

Чтобы сложить два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, нужно от конца первого вектора отложить второй. Суммой будет вектор, идущий из начала первого в конец второго.

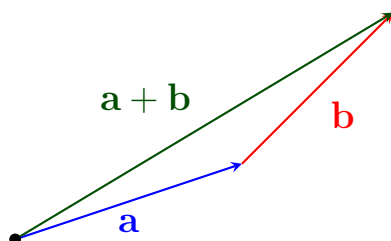


Рисунок 1.15. Правило треугольника для сложения векторов.

Правило параллелограмма.

Если отложить оба вектора от одной точки и построить на них параллелограмм, то диагональ, идущая из общей точки, будет их суммой.

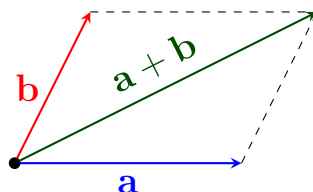


Рисунок 1.16. Правило параллелограмма.

Правило многоугольника.

Если векторов больше двух, удобно применять правило многоугольника. Представьте, что вы идёте по маршруту: сначала перемещаетесь по вектору $\mathbf{a}_1$, затем от его конца — по $\mathbf{a}_2$, далее по $\mathbf{a}_3$ и так далее. Тогда суммарное перемещение из начальной точки в конечную — это вектор, замыкающий ломаную. На рисунке показано сложение трёх векторов.

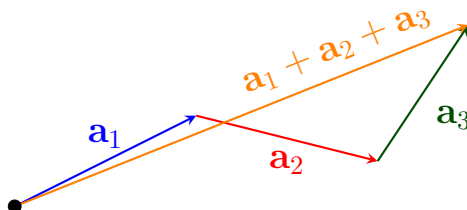


Рисунок 1.17. Правило многоугольника: результат — вектор из начала первого в конец последнего.

Важно отметить, что сложение векторов подчиняется тем же законам, что и сложение чисел: оно **коммутативно** ($\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$) и **ассоциативно** ($(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$). Благодаря этому порядок суммирования не влияет на результат — мы можем складывать векторы в любом порядке.

1.5.2.2 Умножение вектора на число

Перейдём к операции масштабирования. Умножение вектора на число λ изменяет его длину и, возможно, направление. Это действие часто называют **растяжением** (если $|\lambda| > 1$) или **сжатием** (если $0 < |\lambda| < 1$). Если λ отрицательно, вектор дополнительно разворачивается на 180° .

- **Длина:** $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.
- **Направление:**
 - при $\lambda > 0$ — сонаправлен с $\mathbf{a}$;
 - при $\lambda < 0$ — противоположно направлен.
- **Особые случаи:** если $\lambda = 0$ или $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, получается нулевой вектор $\mathbf{0}$.

На рисунке ниже показаны результаты умножения одного и того же вектора $\mathbf{a}$ на разные скаляры: 2, -1 , 0.5 и 0 (нулевой вектор).

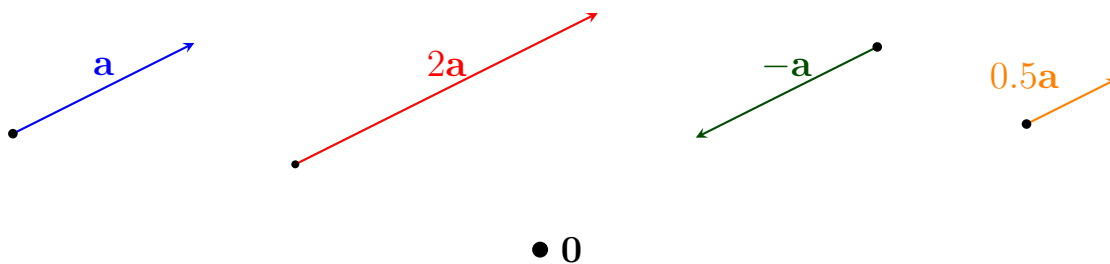


Рисунок 1.18. Умножение вектора $\mathbf{a}$ на различные скаляры: (слева) исходный вектор $\mathbf{a}$, далее — растяжение в 2 раза ($2\mathbf{a}$), отражение ($-\mathbf{a}$) и сжатие в 2 раза ($0.5\mathbf{a}$). Внизу — нулевой вектор ($\mathbf{0}$) как особый случай.

1.5.2.3 Равенство векторов

Два вектора называются **равными**, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление. Для свободных векторов (которые можно параллельно переносить) это означает, что один из них совмещается с другим переносом. В координатах равные векторы имеют одинаковые компоненты.

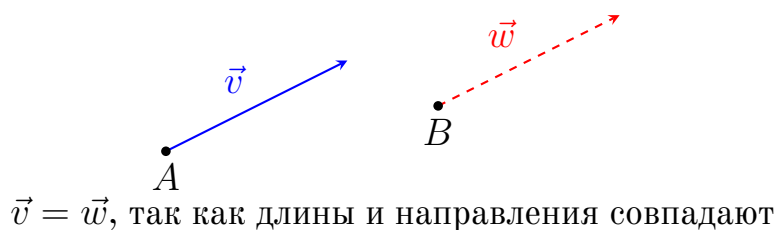


Рисунок 1.19. Равенство свободных векторов: $\vec{v}$ и $\vec{w}$ равны, несмотря на разное расположение

1.5.3 Координаты вектора. Базис

Геометрические построения хороши для понимания, но для вычислений нужны числа. Поэтому мы вводим систему координат и **базис** — набор векторов, через которые можно выразить любой другой вектор.

На плоскости

Выберем две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy и единичные векторы $\mathbf{i}$ (вдоль Ox) и $\mathbf{j}$ (вдоль Oy). Эти векторы образуют **ортонормированный базис** — они единичной длины и ортогональны. Любой вектор $\mathbf{a}$ единственным образом разлагается по этому базису:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}.$$

Числа a_x, a_y — **координаты** вектора $\mathbf{a}$. Запись $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ означает именно это разложение.

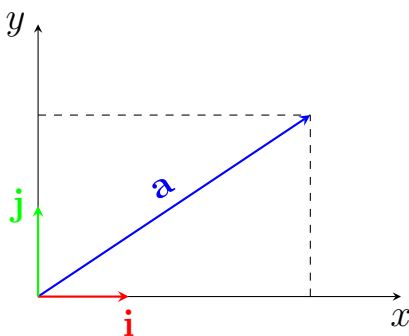


Рисунок 1.20. Разложение вектора по базису $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Координаты — это длины проекций на оси.

В пространстве

В трёхмерном пространстве добавляется третья ось Oz и единичный вектор $\mathbf{k}$. Тогда любой вектор представляется как

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

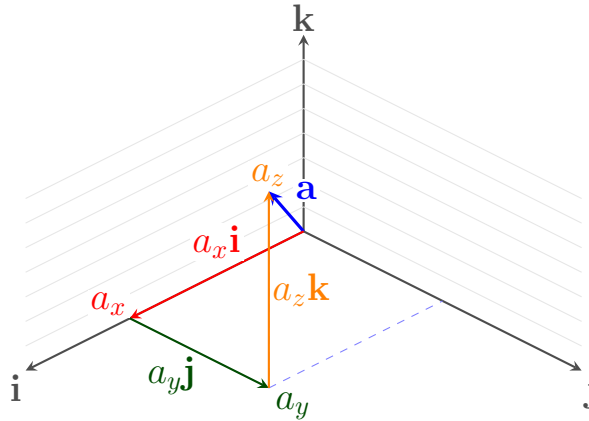


Рисунок 1.21. Вектор $\mathbf{a}$ представлен как сумма своих компонент:

$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$. Пунктирные линии показывают проекции вектора на координатные плоскости.

1.5.4 Ортогональные базисы. Направляющие косинусы

Термин **ортогональный** происходит от греческих слов *orthos* (прямой) и *gonia* (угол) — то есть «прямоугольный». Векторы ортогональны, если угол между ними 90° . **Ортонормированный базис** состоит из единичных ортогональных векторов. Почему он удобен? Потому что координаты вектора в таком базисе — это просто его проекции на оси, и все формулы становятся простыми.

Для вектора $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ его длина вычисляется по теореме Пифагора в трёх измерениях:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Направляющие косинусы — это косинусы углов, которые вектор образует с осями координат. Почему именно косинус? Потому что в прямоугольном треугольнике, образованном вектором и его проекцией на ось, косинус угла равен отношению прилежащего катета (проекции) к гипотенузе (длине вектора). Таким образом:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|},$$

где α, β, γ — углы с осями Ox, Oy, Oz соответственно. Из этих определений следует важное тождество:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Это соотношение часто используется, например, в компьютерной графике для нормализации векторов.

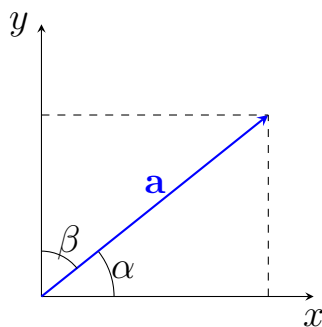


Рисунок 1.22. Углы вектора с осями на плоскости. Косинус угла α — это $\frac{a_x}{|a|}$.

1.5.5 Линейные операции в координатах

Когда векторы заданы координатами, все действия становятся простыми арифметическими операциями:

- **Сложение:** $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$.
- **Вычитание:** $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$.
- **Умножение на число:** $\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

Например, пусть $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{b} = (4, 0, -1)$. Тогда $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (5, -2, 2)$, а $2\mathbf{a} = (2, -4, 6)$.

1.5.6 Коллинеарные и компланарные векторы

Прежде чем перейти к произведениям, введём два фундаментальных понятия, названия которых имеют греческие корни.

Определение 1.29. Коллинеарные векторы (от лат. *col-* — вместе и *linea* — линия) — это векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. Другими словами, один из них получается из другого умножением на число. Условие коллинеарности: их координаты пропорциональны: $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ (если соответствующие координаты не нулевые). Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Пример: $\mathbf{a} = (2, 4, 6)$ и $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ коллинеарны, так как $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$.

Определение 1.30. Компланарные векторы (от лат. *com-* — вместе и *planum* — плоскость) — это векторы, которые лежат в одной плоскости или параллельны одной плоскости. Три вектора в пространстве компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю (о смешанном произведении мы поговорим позже). Геометрически: если они не выходят из одной плоскости, то их нельзя использовать для построения объёмного параллелепипеда.

1.5.7 Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение — одна из самых важных операций. Она связывает длины векторов и угол между ними. Название «скалярное» подчёркивает, что результат — это число (скаляр), а не вектор.

Определение 1.31. Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

где θ — угол между векторами ($0 \leq \theta \leq \pi$).

Почему именно косинус? Потому что в физике и геометрии нас часто интересует проекция одного вектора на направление другого. Из прямоугольного треугольника проекция $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$ равна $|\mathbf{a}| \cos \theta$. Тогда $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| (|\mathbf{a}| \cos \theta)$. Таким образом, скалярное произведение — это произведение длины одного вектора на длину проекции другого.

Из определения следуют частные случаи:

- Если векторы сонаправлены ($\theta = 0$), то $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$.
- Если векторы перпендикулярны ($\theta = 90^\circ$), то $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

В координатах (для ортонормированного базиса) скалярное произведение вычисляется очень просто:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Свойства скалярного произведения:

- коммутативность: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
- дистрибутивность: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$;

- **однородность:** $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$;
- **связь с длиной:** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, причём равенство нулю только для $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

1.5.8 Угол между векторами. Ортогональность

Из определения скалярного произведения легко выразить косинус угла:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Эта формула используется во всех приложениях, где нужно найти угол между направлениями.

Определение 1.32. Векторы называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю. Для ненулевых векторов это означает $\theta = 90^\circ$.

1.5.9 Проекция вектора на направление

Проекция вектора $\mathbf{a}$ на направление вектора $\mathbf{b}$ — это число, показывающее, «какую длину» занимает $\mathbf{a}$ на прямой, задаваемой $\mathbf{b}$. Она вычисляется как

$$\text{пр}_b \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}.$$

Знак проекции положителен, если угол между векторами острый, и отрицателен, если угол тупой.

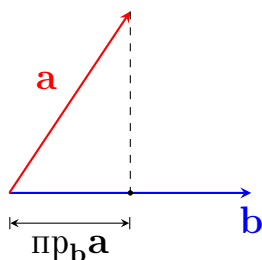


Рисунок 1.23. Проекция вектора $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{b}$.

1.5.10 Векторное произведение

Векторное произведение определено только в трёхмерном пространстве. В отличие от скалярного, результат — вектор. Название «векторное» подчёркивает, что мы получаем вектор.

Определение 1.33. Векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, удовлетворяющий трём условиям:

1. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$, где θ — угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
2. $\mathbf{c}$ перпендикулярен плоскости, содержащей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;
3. направление $\mathbf{c}$ определяется **правилом правого винта** (или правой руки): если вращать $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ по кратчайшему пути, то движение винта (или большой палец правой руки) укажет направление $\mathbf{c}$.

1.5.11 Геометрический смысл векторного произведения

Геометрический смысл векторного произведения двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заключается в том, что его модуль равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \theta,$$

где θ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Это объясняет появление $\sin \theta$ в формуле: площадь параллелограмма действительно равна произведению длин сторон на синус угла между ними. Направление вектора $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ определяется по **правилу правой руки**: если расположить пальцы правой руки вдоль первого вектора $\mathbf{a}$ и поворачивать их ко второму вектору $\mathbf{b}$, то большой палец укажет направление векторного произведения.

В координатах векторное произведение удобно вычислять через определитель матрицы:

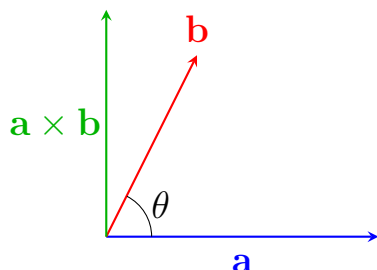
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x).$$

1.5.12 Свойства векторного произведения

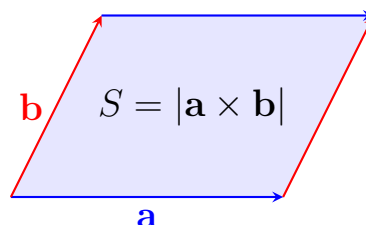
Основные свойства векторного произведения:

- **Антикоммутативность:** $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$. При перестановке векторов знак меняется.
- **Дистрибутивность относительно сложения:** $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.
- **Однородность (ассоциативность относительно скалярного умножения):** $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$ для любого скаляра λ .

- **Равенство нулю для коллинеарных векторов:** если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны (параллельны), то $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. В частности, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.
- **Перпендикулярность:** вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ перпендикулярен обоим векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.



(a) Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и угол θ между ними. Вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка.



(b) Параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Его площадь равна модулю векторного произведения $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

Рисунок 1.24. Геометрическая интерпретация векторного произведения: (a) векторы и направление векторного произведения; (b) параллелограмм и его площадь как модуль векторного произведения.

1.5.13 Смешанное произведение

Смешанное произведение трёх векторов — это число, которое равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах (с учётом знака). Название «смешанное» потому, что оно сочетает скалярное и векторное произведения: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Определение 1.34. Смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ называется число

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

В координатах смешанное произведение равно определителю:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Свойства:

- циклическая перестановка не меняет знак: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$;
- перестановка двух векторов меняет знак: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$;

- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы компланарны (лежат в одной плоскости).

Геометрический смысл:

$|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ — это объём параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Знак определяет ориентацию тройки (правую или левую).

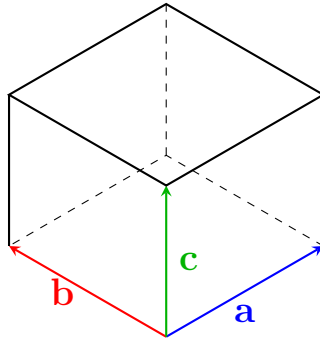


Рисунок 1.25. Объём параллелепипеда $= |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$.

1.5.14 Линейная комбинация и линейная зависимость

Мы уже не раз использовали выражение «линейная комбинация». Теперь дадим строгое определение и объясним происхождение термина.

Определение 1.35. Линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ называется вектор

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n.$$

Слово «линейная» означает, что используются только операции сложения и умножения на число (без возведения в степень, извлечения корня и т.п.).

Определение 1.36. Векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, не все равные нулю, такие что

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

В противном случае (когда такое равенство возможно только при всех $\lambda_i = 0$) векторы называются **линейно независимыми**.

Почему это важно? Если векторы линейно зависимы, то один из них можно

выразить через другие, и «информации» в таком наборе меньше, чем кажется. Например:

- Два коллинеарных вектора линейно зависимы, так как $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$.
- Три компланарных вектора в пространстве линейно зависимы.
- Базисные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ линейно независимы — ни один из них нельзя представить в виде комбинации двух других.

1.5.15 Разложение вектора по базису

Если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ образуют базис (линейно независимы и их количество равно размерности пространства), то любой вектор $\mathbf{a}$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

Числа α_i называются координатами вектора в этом базисе. В ортонормированном базисе (как $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) эти координаты совпадают с проекциями на оси, что делает вычисления максимально простыми.

Пример 1.38 (Вычисление площади треугольника и проверка принадлежности точки с использованием векторного произведения)

Условие. Вершины треугольника: $A(1, 2)$, $B(5, 4)$, $C(3, 7)$. Контрольная точка: $P(4, 5)$. Требуется:

1. найти площадь $\triangle ABC$;
2. проверить, принадлежит ли точка P этому треугольнику.

Решение.

1. Векторное представление сторон. Построим векторы, выходящие из одной вершины, например из A :

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 1, 4 - 2) = (4, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (3 - 1, 7 - 2) = (2, 5).$$

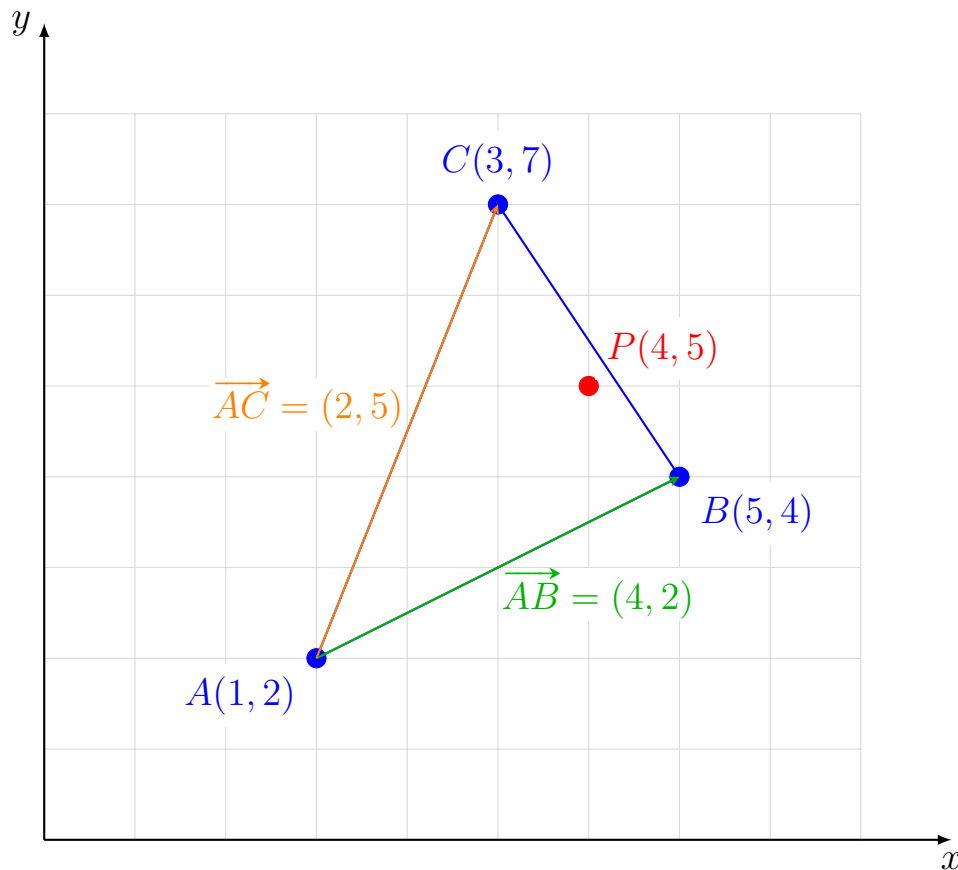


Рисунок 1.26. Исходная конфигурация: треугольник ABC и векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, выходящие из вершины A . Точка $P(4, 5)$ отмечена красным.

2. Площадь треугольника через векторное произведение.

На плоскости векторное произведение двух векторов $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ и $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$ даёт скаляр (число), вычисляемый по формуле:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_x b_y - a_y b_x.$$

Геометрический смысл:

- Модуль векторного произведения $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ как на сторонах.
- Площадь треугольника, образованного этими векторами, составляет ровно половину площади такого параллелограмма.

Поэтому формула для площади треугольника ABC с вершинами в точках

A, B, C принимает вид:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|,$$

где $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ — векторы, выходящие из одной вершины A .

Вычисление для нашего случая: Ранее мы нашли:

$$\overrightarrow{AB} = (4, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (2, 5).$$

Векторное произведение этих векторов можно вычислить как определитель матрицы:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 20 - 4 = 16.$$

Теперь находим площадь треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |16| = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.$$

Проверка результата:

- Значение определителя положительно ($16 > 0$), значит, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ ориентированы против часовой стрелки.
- Модуль определителя (16) действительно даёт площадь параллелограмма.
- Половина этого значения (8) — корректная площадь треугольника.

Таким образом, площадь треугольника ABC равна 8 квадратным единицам.

3. Проверка принадлежности точки P треугольнику.

Критерий принадлежности точки треугольнику: Точка P лежит внутри треугольника ABC тогда и только тогда, когда:

1. $S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PCA} = S_{ABC}$;
2. все три ориентированные площади S_{PAB} , S_{PBC} , S_{PCA} имеют тот же знак, что и S_{ABC} .

Вычислим площади треугольников с вершиной P .

Для $\triangle PAB$ (относительно P):

$$\overrightarrow{PA} = A - P = (1 - 4, 2 - 5) = (-3, -3),$$

$$\overrightarrow{PB} = B - P = (5 - 4, 4 - 5) = (1, -1).$$

Скалярное произведение: $(-3) \cdot (-1) - (-3) \cdot 1 = 3 - (-3) = 6$. Площадь $S_{PAB} = \frac{1}{2}|6| = 3$.

Для $\triangle PBC$:

$$\overrightarrow{PB} = (1, -1), \quad \overrightarrow{PC} = C - P = (3 - 4, 7 - 5) = (-1, 2).$$

Скалярное произведение: $1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) = 2 - 1 = 1$. $S_{PBC} = \frac{1}{2}|1| = \frac{1}{2}$.

Для $\triangle PCA$:

$$\overrightarrow{PC} = (-1, 2), \quad \overrightarrow{PA} = (-3, -3).$$

Скалярное произведение: $(-1) \cdot (-3) - 2 \cdot (-3) = 3 + 6 = 9$. $S_{PCA} = \frac{1}{2}|9| = \frac{9}{2}$.

Сумма площадей:

$$S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PCA} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 3 + 0,5 + 4,5 = 8,$$

что в точности равно $S_{ABC} = 8$. Поскольку все три площади положительны и имеют тот же знак, что и S_{ABC} , точка P лежит **внутри** треугольника ABC .

Вывод. Мы использовали векторное представление сторон, вычислили площадь через псевдоскалярное произведение и проверили принадлежность точки треугольнику методом разбиения на три меньших треугольника. Такой подход широко применяется в компьютерной графике (определение попадания курсора в полигон), в геоинформатике (поиск точки на карте) и в физических симуляциях.

Теперь, когда мы овладели основными векторными операциями на плоскости и в пространстве, мы можем перейти к систематическому изучению **аналитической геометрии на плоскости**. В следующей главе мы научимся задавать прямые, окружности и другие кривые с помощью уравнений, исследовать их взаимное расположение, вычислять расстояния и углы — и всё это с использованием векторного аппарата. Векторы станут нашим основным инструментом для вывода формул и решения геометрических задач. Приступаем ко второй главе!